OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

OBRAS

SOBRE

MATHEMATICA

DO

Dr. F. Gomes Teixeira

DIRECTOR DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO,
ANTIGO PROFESSOR NA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, ETC.

PUBLICADAS

POR ORDEM DO GOVERNO PORTUGUÊS

VOLUME TERCEIRO

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1906

CURSO

DE

ANALYSE INFINITESIMAL

CALCULO DIFFERENCIAL

(Premiado pela Academia Real das Sciencias de Lisboa
com o premio instituido por El-Rei D. Luiz I)

4.ª edição

INTRODUCÇÃO

CAPITULO I

Theoria dos numeros irracionaes, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios. Regras para o seu calculo.

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra (1)

1. Os numeros inteiros e os numeros fraccionarios, cujos numeradores e denominadores são numeros inteiros, constituem a classe dos numeros *racionaes*, que podem ser *positivos* ou *negativos*. O estudo dos numeros racionaes positivos é o primeiro objecto da Arithmetica. Ahi são definidos, assim como as operações numericas, e ahi são estudadas as propriedades fundamentaes d'estas operações.

Em seguida, na Algebra, em logar de numeros consideram-se letras que os representam, e definem-se as operações algebricas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas, isto é, da maneira seguinte:

1.° *Addição* dos numeros representados pelas lettras a e b é a combinação *univoca* (de resultado unico) d'estes numeros, cujas leis fundamentaes são:

1) $a+b=b+a$, *(lei commutativa)*

2) $(a+b)+c=(a+c)+b$, *(lei associativa)*

3) $a+0=a$.

(1) A theoria geral das operações, consideradas como combinações de numeros ou objectos, foi estudada por Grassmann nos seus *Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844), por Hankel na sua *Theorie der complexen Zahlsysteme* (Leipzig, 1867), etc.

2.º *Subtracção* é a operação inversa da addição.

3.º *Multiplicação* é a combinação univoca dos numeros, representados pelas lettras a e b, caracterizada pelas leis:

1) $ab = ba$, (*lei commutativa*)

2) $(ab)c = (ac)b$, (*lei associativa*)

3) $(a + b)c = ac + bc$, (*lei distributiva*)

4) $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$.

4.º *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.º *Elevação a potencia* é a multiplicação de factores eguaes.

6.º *Extracção de raiz* é a operação inversa da elevação a potencia.

Reflectindo um pouco sobre o que se aprendeu na Arithmetica, é facil de ver que o calculo arithmetico é principalmente fundado nas leis fundamentaes precedentes, na propriedade que têem as operações de darem resultados eguaes quando se substituem a e b por quantidades eguaes e nas leis fundamentaes das egualdades: $a = a$; de $a = b$ resulta $b = a$; de $a = b$ e $b = c$ resulta $a = c$.

Duas das operações precedentes, a subtracção e a extracção de raiz, não são sempre possiveis, quando se usa sómente dos numeros racionaes positivos. Para não ter porém de separar os casos em que estas operações são ou não são possiveis, introduzem-se novas especies de numeros e generalizam-se as definições das operações, tendo sempre em vista que se conservem as propriedades fundamentaes que vimos de indicar, e que as novas definições levem aos mesmos resultados que as antigas, quando se applicam aos numeros para os quaes estas foram primeiramente estabelecidas. Foi o que se viu na Arithmetica, onde appareceram os numeros *irracionaes*, e na Algebra, onde appareceram os numeros *negativos* e os numeros *imaginarios*. Aqui vamos recordar succintamente a theoria d'estas tres especies de numeros.

II

Theoria dos numeros irracionaes [1]

2. Consideremos um grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e crescentes,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

[1] A theoria dos numeros irracionaes foi tratada primitivamente debaixo de uma fórma geometrica. Occuparam-se da theoria arithmetica dos mesmos numeros, á qual se tem dado diversas fórmas, Weierstrass

e outro grupo composto de uma infinidade de numeros racionaes, positivos e decrescentes,

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

e supponhamos que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os numeros do segundo, e que a differença $b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se existe um numero racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os do segundo grupo, este numero é completamente determinado pelos dois grupos. Com effeito, se existissem dois numeros A e B que satisfizessem a esta condição, estes numeros deveriam estar comprehendidos entre b_n e a_n, e seria, por maior que fosse n,

$$B - A < b_n - a_n,$$

o que é absurdo, visto que a differença $b_n - a_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande.

Se porém não existe numero algum racional maior do que os numeros do primeiro grupo e menor do que os do segundo, diz-se, por definição, que os dois grupos estão separados por um numero *irracional*. Como, neste caso, qualquer numero racional differente dos precedentes é menor do que um valor de a_n ou maior do que um valor de b_n, vê-se que cada numero irracional divide a totalidade dos numeros racionaes em dois grupos, taes que os numeros do primeiro grupo são todos menores do que os do segundo grupo. Os numeros do primeiro d'estes grupos dizem-se *menores* e os do segundo *maiores* do que o numero irracional considerado.

Dois numeros irracionaes A e B dizem se *eguaes* quando todos os numeros racionaes menores do que A são tambem menores do que B e todos os numeros racionaes maiores do que A são tambem maiores do que B.

Diz-se que A é maior do que B, ou que B é menor do que A, quando existe algum numero racional maior do que B e menor do que A.

3. Definamos agora as operações sobre numeros irracionaes.

---

no seu curso na Universidade de Berlin, Méray em um trabalho publicado na *Revue des sociétés savantes* (Paris, 1869), G. Cantor em artigos publicados nos *Mathematische Annalen* (Leipzig, t. v e t. xxi), Dedekind em um trabalho intitulado *Stetigkeit und irracionale Zahlen* (Brunswick, 1872), Tannery na sua *Introduction à la théorie des fonctions* (Paris, 1886), Capelli em um artigo publicado no *Giornale di Mathematiche* (Napoli, 1897) e nas suas *Istituzioni di Analisi algebrica* (Napoli, 1902), etc. A theoria de Weierstrass póde ver-se em um trabalho publicado por Pincherle no t. xviii do *Giornale di Matematiche*.

1.º Sejam dados dois numeros racionaes ou irracionaes A e B, determinados pelos grupos

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \\ b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots \\ b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots, \end{cases}$$

e formemos o grupo de numeros crescentes

$$a_1 + a'_1, \; a_2 + a'_2, \; \ldots, \; a_n + a'_n, \; \ldots$$

e o grupo de numeros decrescentes

$$b_1 + b'_1, \; b_2 + b'_2, \; \ldots, \; b_n + b'_n, \; \ldots$$

Como os numeros do primeiro d'estes grupos são menores do que os do segundo, e como a differença entre $b_n + b'_n$ e $a_n + a'_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande, estes grupos determinam um numero *racional* ou *irracional,* que os separa, o qual se chama *somma* dos numeros dados.

Para justificar esta definição, notemos em primeiro logar que, se os numeros dados A e B forem racionaes, os grupos que vimos de formar determinam o numero racional A + B, visto que este numero os separa.

Notemos em seguida que a somma dos numeros A e B, como vimos de a definir, goza das propriedades fundamentaes indicadas no n.º 1, como é facil de verificar.

Assim, por ser

$$a_n + a'_n = a'_n + a_n, \quad b_n + b'_n = b'_n + b_n,$$

vê-se que os grupos de numeros que determinam A + B coincidem com os que determinam B + A, e que temos portanto A + B = B + A.

Do mesmo modo, por ser

$$(a_n + a'_n) + a''_n = (a_n + a''_n) + a'_n,$$
$$(b_n + b'_n) + b''_n = (b_n + b''_n) + b'_n,$$

$(a''_1, a''_2, \ldots)$, $(b''_1, b''_2, \ldots)$ sendo os grupos que determinam um terceiro numero C, temos

$$(A + B) + C = (A + C) + B.$$

2.º Consideremos ainda os numeros A e B e seja A > B. Demonstra-se, procedendo como no caso anterior, que os grupos

$$a_1 - b'_1,\ a_2 - b'_2,\ \ldots,\ a_n - b'_n,\ \ldots$$
$$b_1 - a'_1,\ b_2 - a'_2,\ \ldots,\ b_n - a'_n,\ \ldots$$

determinam um numero racional ou irracional. A este numero chama-se *differença* dos numeros dados, e representa-se por $A - B$. É facil, com effeito, de ver que da sua somma com o numero B resulta um numero egual a A. Para isso, basta notar que esta somma é determinada pelos grupos

$$a_1 - b'_1 + a'_1,\ \ldots,\ a_n - b'_n + a'_n,\ \ldots$$
$$b_1 - a'_1 + b'_1,\ \ldots,\ b_n - a'_n + b'_n,\ \ldots,$$

e que, sendo α um numero racional qualquer, menor do que esta somma, temos (para um valor de n sufficientemente grande)

$$\alpha < a_n - b'_n + a'_n < a_n < A,$$

e que, sendo α maior do que a mesma somma, temos

$$\alpha > b_n - a'_n + b'_n > b_n > A;$$

portanto, em virtude da definição de egualdade, é

$$(A - B) + B = A.$$

3.º Chama-se *producto* dos numeros A e B ao numero definido pelos grupos

$$a_1 a'_1,\ a_2 a'_2,\ \ldots,\ a_n a'_n,\ \ldots,$$
$$b_1 b'_1,\ b_2 b'_2,\ \ldots,\ b_n b'_n,\ \ldots$$

Para justificar esta definição, é necessario demonstrar que estes dois grupos determinam um numero racional ou irracional, e, para isso, basta attender a que $a_n a'_n$ cresce e $b_n b'_n$ decresce, quando n augmenta, a que temos $b_n b'_n > a_m a'_m$, quaesquer que sejam os valores de n e m, e a que da desegualdade

$$b_n b'_n - a_n a'_n = b_n (b'_n - a'_n) + a'_n (b_n - a_n) < b_1 (b'_n - a'_n) + b_1 (b_n - a_n)$$

resulta que a differença $b_n b'_n - a_n a'_n$ se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes.

É facil demonstrar que o producto, assim definido, satisfaz ás leis fundamentaes da multiplicação, mencionadas no n.º 1.

4.º Consideremos agora os grupos

$$\frac{a_1}{b'_1},\ \frac{a_2}{b'_2},\ \ldots,\ \frac{a_n}{b'_n},\ \ldots,$$

$$\frac{b_1}{a'_1},\ \frac{b_2}{a'_2},\ \ldots,\ \frac{b_n}{a'_n},\ \ldots,$$

o primeiro composto de numeros que crescem com n, o segundo composto de numeros que decrescem com n e são superiores a todos os do primeiro grupo. Por meio da desegualdade

$$\frac{b_n}{a'_n} - \frac{a_n}{b'_n} = \frac{b_n b'_n - a_n a'_n}{a'_n b'_n} < \frac{b_n b'_n - a_n a'_n}{a'^2_1}$$

e da desegualdade anterior, vê-se que a differença $\frac{b_n}{a'_n} - \frac{a_n}{b'_n}$ se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes. Logo estes grupos definem um numero, racional ou irracional, que se chama *quociente* dos numeros A e B.

Para mostrar que o producto da multiplicação do numero que vem de ser definido pelo numero B, definido pelos grupos (2), é egual ao numero A, definido pelos grupos (1), basta attender a que este producto é determinado pelos grupos

$$\frac{a_1}{b'_1}a'_1,\ \frac{a_2}{b'_2}a'_2,\ \ldots,\ \frac{a_n}{b'_n}a'_n,\ \ldots,$$

$$\frac{b_1}{a'_1}b'_1,\ \frac{b_2}{a'_2}b'_2,\ \ldots,\ \frac{b_n}{a'_n}b'_n,\ \ldots,$$

e a que, se α representar um numero racional qualquer, temos, para um valor de n sufficientemente grande, quando α é inferior ao referido producto

$$\alpha < \frac{a_n}{b'_n}a'_n < a_n < \text{A},$$

e, quando α é superior ao mesmo producto,

$$\alpha > \frac{b_n}{a'_n}b'_n > b_n > \text{A}.$$

5.º Chama-se *potencia* do grau m do numero irracional A ao producto de m factores eguaes a A. Os grupos que a determinam são pois

$$a_1^m,\ a_2^m,\ \ldots,\ a_n^m,\ \ldots;\quad b_1^m,\ b_2^m,\ \ldots,\ b_n^m,\ \ldots$$

6.º Chama-se *raiz* de indice m do numero A ao numero que elevado á potencia m dá A. Adeante veremos que existe sempre um numero positivo que satisfaz a esta condição.

4. Para completar a theoria das operações sobre numeros irracionaes, que vem de considerar-se, é ainda necessario mostrar que o valor da somma, producto, etc. dos numeros A e B não varia quando se substituem os grupos de numeros empregados para os determinar por outros que definam numeros eguaes a estes.

Sejam A, B, C e D quatro numeros determinados pelos grupos

$$\left.\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \\ b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots \\ b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots \end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix} c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \\ d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} c'_1, c'_2, \ldots, c'_n, \ldots \\ d'_1, d'_2, \ldots, d'_n, \ldots \end{matrix}\right\},$$

e seja $A = C$, $B = D$. A somma dos numeros A e B é determinada pelos grupos

$$\left.\begin{matrix} a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \ldots, a_n + a'_n, \ldots \\ b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \ldots, b_n + b'_n, \ldots \end{matrix}\right\}$$

e a somma dos numeros C e D pelos grupos

$$\left.\begin{matrix} c_1 + c'_1, c_2 + c'_2, \ldots, c_n + c'_n, \ldots \\ d_1 + d'_1, d_2 + d'_2, \ldots, d_n + d'_n, \ldots \end{matrix}\right\}.$$

Para mostrar que estas sommas são eguaes, notemos que das egualdades $A = C$ e $B = D$ resulta, quaesquer que sejam os valores de m e n,

$$a_n < d_m, \quad a'_n < d'_m, \quad b_n > c_m, \quad b'_n > c'_m.$$

Sendo pois α um numero racional, menor do que $A + B$, existirá um valor de n tal que será, qualquer que seja m,

$$\alpha < a_n + a'_n < d_m + d'_m,$$

e portanto $\alpha < C + D$; e, sendo α maior do que $A + B$,

$$\alpha > b_n + b'_n > c_m + c'_m,$$

e portanto $\alpha > C + D$. Logo, em virtude da definição de egualdade, temos a relação

$$A + B = C + D.$$

Do mesmo modo se procede no caso das outras operações.

Como consequencia do que precede póde mostrar-se que, se for $A > B$ e $C \geqq D$, temos $A + C > B + D$. Da definição de subtracção resulta, com effeito, que existem dois numeros K e K' taes que $A = B + K$ e $C = D + K'$; portanto temos a egualdade

$$A + C = B + D + K + K',$$

da qual se deduz a desegualdade que se pretende demonstrar.

É facil estender aos numeros irracionaes todas as outras propriedades das desegualdades que têem logar no caso dos numeros racionaes.

5. A theoria precedente abrange os numeros irracionaes a que se foi conduzido em Arithmetica pela extracção das raizes. Assim, por exemplo, $\sqrt{A}$, quando não é egual a um numero racional, representa um numero irracional que separa o grupo de numeros racionaes, que se obtêem extrahindo a raiz quadrada a A pelo processo ensinado na Arithmetica, levando a approximação successivamente até ás decimas, centesimas, etc.,

$$\frac{m_1}{10}, \frac{m_2}{10^2}, \frac{m_3}{10^3}, \ldots, \frac{m_n}{10^n}, \ldots$$

do grupo de numeros

$$\frac{m_1+1}{10}, \frac{m_2+1}{10^2}, \frac{m_3+1}{10^3}, \ldots, \frac{m_n+1}{10^n}, \ldots$$

Os quadrados dos numeros do primeiro grupo e dos numeros racionaes inferiores a estes são menores do que A, e os quadrados dos numeros do segundo grupo e dos numeros racionaes superiores a estes são maiores do que A; porisso $\sqrt{A}$ separa os numeros racionaes cujos quadrados são menores do que A d'aquelles cujos quadrados são maiores do que A.

É facil de ver que o numero irracional assim definido goza da propriedade fundamental de ser o seu quadrado egual a A. Elevando com effeito ao quadrado o numero determinado pelos grupos anteriores, vem o numero definido pelos grupos (n.º 3–5.º)

$$\frac{m_1^2}{10^2}, \frac{m_2^2}{10^4}, \ldots, \frac{m_n^2}{10^{2n}}, \ldots$$

$$\frac{(m_1+1)^2}{10^2}, \frac{(m_2+1)^2}{10^4}, \ldots, \frac{(m_n+1)^2}{10^{2n}}, \ldots;$$

mas os numeros do primeiro grupo são todos inferiores a A e os do segundo grupo são superiores a A; logo estes grupos determinam o numero A.

Do mesmo modo se consideram as raizes de indice superior a 2.

6. Consideremos agora o grupo de numeros crescentes

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

e o grupo de numeros decrescentes, maiores do que os anteriores,

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots,$$

e supponhamos que estes numeros são *irracionaes* e que a differença $w_n - v_n$ póde tornar-se tão pequena quanto se queira, dando a n um valor sufficientemente grande. Vamos mostrar que, para os separar, não é necessario introduzir uma nova especie de numeros, pois que os separa um numero racional ou irracional.

Seja, com effeito,

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

um grupo de numeros racionaes crescentes e

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

um grupo de numeros racionaes decrescentes, que se formem tomando um numero racional entre cada par de numeros successivos dos grupos anteriores. Como a_n e b_n estão comprehendidos entre v_n e w_n, temos

$$b_n - a_n < w_n - v_n,$$

e porisso os ultimos grupos de numeros determinam um numero racional ou irracional c, que os separa. Este numero não póde ser inferior aos numeros $v_1, v_2, \ldots$, porque se fosse $c < v_n$, teriamos $c < a_n$, o que não póde ter logar, e, por motivo analogo, não póde ser superior aos numeros $w_1, w_2 \ldots$; logo separa estes dois grupos.

7. Como consequencia da doutrina que precede, podemos agora, completando o que se disse no fim do n.º 3, determinar $\sqrt[m]{A}$, quando A é irracional.

Consideremos, para isso, o grupo de numeros crescentes

$$\sqrt[m]{a_1}, \sqrt[m]{a_2}, \ldots, \sqrt[m]{a_n}, \ldots$$

e o grupo de numeros decrescentes, superiores aos do primeiro grupo,

$$\sqrt[m]{b_1}, \sqrt[m]{b_2}, \ldots, \sqrt[m]{b_n}, \ldots$$

Elevando á potencia m os dois membros da identidade

$$\sqrt[m]{b_n} = \sqrt[m]{a_n} + \left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right),$$

vem

$$b_n = a_n + m\left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right)\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1} + \dots;$$

e portanto, temos

$$b_n - a_n > m\left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right)\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1} > m\left(\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n}\right)\left(\sqrt[m]{a_1}\right)^{m-1},$$

o que dá

$$\sqrt[m]{b_n} - \sqrt[m]{a_n} < \frac{b_n - a_n}{m\left(\sqrt[m]{a_1}\right)^{m-1}}.$$

Vê-se, por meio d'esta desegualdade, que a differença entre os termos da ordem n dos dois grupos considerados se póde tornar tão pequena quanto se queira, dando a n valores sufficientemente grandes. Logo os dois grupos determinam um numero racional ou irracional.

Para mostrar que o numero que vem de ser obtido, elevado á potencia m, dá A, basta applicar aos grupos que o determinam a regra dada no n.º 3-5.º

8. *Representação geometrica dos numeros irracionaes.* Convem recordar que os numeros irracionaes que, em Geometria elementar, a medição dos segmentos de recta incommensuraveis com a unidade levou a considerar, coincidem com os que vêem de ser definidos. Com effeito, sendo dado o segmento OK, resulta do

O M_1 M_2 M_n K N_n N_2 N_1

postulado de Archimedes [1] que podemos determinar dois segmentos OM_1 e ON_1, entre os quaes esteja comprehendido OK, que contenham respectivamente m_1 e m_1+1 vezes a unidade. Do mesmo modo, dividindo a unidade em um numero determinado de partes eguaes, dez por exemplo, e tomando uma d'ellas para nova unidade, podemos determinar dois segmentos OM_2 e ON_2 que contenham respectivamente m_2 e m_2+1 vezes a nova unidade, e

---

[1] Dá-se o nome de *postulado de Archimedes* ao principio seguinte:

Se λ e λ_1 representarem dois segmentos de recta e se for $\lambda > \lambda_1$, existe um numero inteiro m tal que é $\lambda_1 . m > \lambda$.

A doutrina d'este numero é fundada nos postulados que caracterizam a linha recta, no postulado de Archimedes e no *postulado de continuidade*, cujo enunciado é dado no texto.

sejam portanto representados pelos numeros $\frac{m_2}{10}$ e $\frac{m_2+1}{10}$, quando se referem á primitiva unidade. Continuando do mesmo modo formam-se dois grupos de segmentos

$$OM_1,\ OM_2,\ OM_3,\ \ldots;\quad ON_1,\ ON_2,\ ON_3,\ \ldots,$$

entre os quaes está comprehendido OK, taes que a differença entre ON_n e OM_n se póde tornar menor do que qualquer segmento dado, tomando n sufficientemente grande; e a estes grupos de segmentos correspondem os grupos de numeros

$$m_1,\ \frac{m_2}{10},\ \frac{m_3}{10^2},\ \ldots;\quad m_1+1,\ \frac{m_2+1}{10},\ \frac{m_3+1}{10^2},\ \ldots,$$

que determinam um numero racional ou irracional A, que os separa. Ao segmento OK corresponde pois um numero irracional A, tal que os numeros racionaes menores do que A são representados por segmentos menores do que OK e os numeros maiores do que A são representados por segmentos maiores do que OK. Podemos accrescentar que não existe outro numero B, que satisfaça a estas condições, porque, se um tal numero existisse e fosse $B > A$, entre B e A estaria comprehendido um numero racional α, que, por ser menor do que B, seria representado por um segmento menor do que OK, e, por ser maior do que A, seria representado por um segmento maior do que OK, o que é absurdo. O numero que vimos de determinar é o que, em Geometria elementar, se tomou para medida do segmento considerado.

Reciprocamente, a todo o numero irracional A, definido pelos grupos de numeros racionaes $(a_1, a_2, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots)$, corresponde um segmento OK, tal que os numeros racionaes menores do que A são representados por segmentos menores do que OK e os numeros racionaes maiores do que A são representados por segmentos maiores do que OK. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de um ponto O, todos os numeros racionaes menores do que o numero irracional considerado, que entram na sua definição, obtem-se uma serie de pontos, que representaremos por $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ Do mesmo modo os numeros maiores do que A, que entram na sua definição, dão outra serie de pontos, que representaremos por $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$, os quaes, por ser $ON_n > OM_m$, quaesquer que sejam os valores de m e n, estão separados dos anteriores. Esta separação não póde ser feita por um segmento de recta, porque se o fosse, o numero que representa o segmento $M_n N_n$, isto é $b_n - a_n$, não poderia ser inferior ao que representa aquelle segmento. Admittindo porém como postulado *(postulado da continuidade)* (¹) que os separe um ponto K, o segmento OK satisfaz ás condições indicadas.

(¹) Foi G. Cantor quem primeiro notou a necessidade de fazer intervir este postulado na presente questão.

Definiram-se na Geometria elementar as operações sobre segmentos de recta e viu se que, se L e L_1 são dois segmentos representados pelos numeros A e B, os numeros $A+B$ e $A.B$ representam a somma e o producto dos segmentos considerados. Não é necessario recordar aqui como se estabelece este principio no caso de A e B serem racionaes. No caso de serem numeros irracionaes, definidos pelos grupos (1) e (2), os segmentos L e L_1 estão respectivamente comprehendidos entre os segmentos correspondentes a a_n e b_n e entre os que correspondem a a'_n e b'_n; e portanto o segmento $L+L_1$ está comprehendido entre os segmentos correspondentes a $a_n+a'_n$ e $b_n+b'_n$, qualquer que seja n. O numero $A+B$, que separe estes ultimos numeros, corresponde pois ao segmento $L+L_1$. Do mesmo modo se procede no caso da multiplicação dos segmentos L e L_1.

A correspondencia entre os segmentos de recta e os numeros, que vem de ser considerada, é a base primordial da Geometria analytica. Em virtude d'ella, a toda a relação entre segmentos corresponde uma relação entre numeros e reciprocamente.

III

Numeros negativos e numeros imaginarios

9. *Numeros negativos.* Consideremos a differença $a-b$ entre os dois numeros a e b. Se fôr $b>a$, a subtracção precedente é impossivel, empregando os numeros até aqui estudados. Considera-se porisso $a-b$ como definindo uma nova especie de numeros, a que se chama *numeros negativos.*

No caso de ser $a>b$ e $c>d$, os numeros $a-b$ e $c-d$ são eguaes quando

$$a+d=b+c;$$

no caso de ser $a<b$ e $c\lesseqgtr d$ dizem-se, por definição, eguaes quando esta condição tem logar.

Diz-se que $a-b$ é maior do que $c-d$, ou que $c-d$ é menor do que $a-b$, quando

$$a+d>b+c.$$

D'aqui resulta, pondo $a=0$ e $c=0$, que $-b>-d$, quando $d>b$, isto é, que um numero negativo menor do que outro tem maior valor absoluto.

Introduzida assim esta especie de numeros, resta definir as operações a que se sujeitam, de modo que as leis indicadas no n.º 1 tenham logar.

1.º Chama-se *addição* de dois numeros $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela egualdade

$$(a-b)+(c-d)=a+c-(b+d).$$

2.° Chama-se *multiplicação* de dois numeros $a-b$ e $c-d$ a operação definida pela egualdade

$$(a-b)(c-d) = ac+bd-(bc+ad).$$

3.° Chamam se *subtracção* e *divisão* as operações inversas da addição e da multiplicação.

4.° Cama-se *elevação a potencia* a multiplicação de factores eguaes.

É facil de ver que as operações assim definidas gozam das propriedades fundamentaes enunciadas no n.° 1, que coincidem com as operações arithmeticas no caso de ser $a>b$ e $c>d$, e que dão origem ás regras bem conhecidas da Algebra.

10. *Numeros imaginarios.* A extracção da raiz de grau par das quantidades negativas é uma operação impossivel, quando se usa dos numeros precedentemente considerados. D'ahi vem a necessidade de introduzir uma nova especie de numeros, da fórma $a+b\sqrt{-1}$, a que se chama *numeros imaginarios* ou *numeros complexos,* e que comprehendem todos os precedentes como caso particular.

Para introduzir estes numeros no calculo, é necessario definir as operações a que se sujeitam, de modo que lhes sejam applicaveis as leis fundamentaes expostas no n.° 1.

1.° Dois numeros $a+b\sqrt{-1}$ e $c+d\sqrt{-1}$ dizem-se *eguaes* quando é $a=c$, $b=d$.

2.° Chama-se *addição* dos dois numeros imaginarios $a+b\sqrt{-1}$ e $c+d\sqrt{-1}$ a operação definida pela egualdade

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1}) = a+c+(b+d)\sqrt{-1}.$$

3.° Chama-se *subtracção* a operação inversa da addição.

4.° Chama-se *multiplicação* dos numeros $a+b\sqrt{-1}$ e $c+d\sqrt{-1}$ a operação definida pela egualdade

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}.$$

5.° Chama-se *divisão* do numero $a+b\sqrt{-1}$ pelo numero $c+d\sqrt{-1}$ a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim achar um numero $x+y\sqrt{-1}$ que multiplicado por $c+d\sqrt{-1}$ dê $a+b\sqrt{-1}$.

Temos pois

$$a+b\sqrt{-1} = (x+y\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = cx-dy+(dx+cy)\sqrt{-1},$$

d'onde se tira

$$a = cx-dy, \quad b = dx+cy.$$

Estas equações dão os valores de x e y que entram no quociente pedido, e vem

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\sqrt{-1}.$$

É facil de ver que as operações, que vimos de definir, gozam das propriedades fundamentaes expostas no n.º 1, e que coincidem, no caso de ser $b=0$ e $d=0$, com as operações relativas aos numeros reaes.

11. Todo o imaginario $a+b\sqrt{-1}$ póde ser reduzido á fórma trigonometrica

$$\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

pondo

$$a=\rho\cos\theta,\quad b=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

o que dá

$$\rho=+\sqrt{a^2+b^2},\quad \mathrm{sen}\,\theta=\frac{b}{\rho},\quad \cos\theta=\frac{a}{\rho}.$$

A primeira d'estas formulas determina ρ. As duas outras, consideradas simultaneamente, determinam θ. As quantidades ρ e θ chamam se respectivamente *modulo* e *argumento* do imaginario. É facil de ver, pondo $b=0$, que os modulos das quantidades reaes coincidem com os seus valores absolutos.

Para commodidade representa-se ordinariamente o imaginario $\sqrt{-1}$ pela letra i, e representa-se muitas vezes o modulo do numero z, quando é imaginario, ou o seu valor absoluto, quando é real, pelo signal $|z|$. Estas notações serão adoptadas n'esta obra.

As regras para o calculo dos imaginarios, quando se lhes dá a fórma trigonometrica, conduzem aos resultados seguintes:

I. A somma e a differença dos imaginarios

$$z=\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta),\quad z'=\rho'(\cos\theta'+i\,\mathrm{sen}\,\theta')$$

são dadas pela egualdade

$$z\pm z'=\rho\cos\theta\pm\rho'\cos\theta'+i(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\pm\rho'\,\mathrm{sen}\,\theta')$$

ou

$$z\pm z'=\mathrm{R}(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega),$$

pondo

$$\rho\cos\theta\pm\rho'\cos\theta'=\mathrm{R}\cos\omega,\quad \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\pm\rho'\,\mathrm{sen}\,\theta'=\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega,$$

o que dá

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \pm 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}.$$

Esta expressão de R mostra que é $R^2 \leq (\rho + \rho')^2$; e portanto temos o theorema seguinte:

O modulo de uma somma algebrica de imaginarios não póde ser maior do que a somma dos modulos das parcellas.

II. O producto dos mesmos imaginarios é dado pela egualdade

$$zz' = \rho\rho' [\cos\theta \cos\theta' - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' + i(\cos\theta \operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta \cos\theta')] = \rho\rho' [\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')].$$

Multiplicando este resultado por

$$z'' = \rho'' (\cos\theta'' + i \operatorname{sen}\theta''),$$

vem

$$zz'z'' = \rho\rho'\rho'' [\cos(\theta + \theta' + \theta'') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \theta'')].$$

Em geral temos

$$zz' \ldots z^{(n-1)} = \rho\rho' \ldots \rho^{(n-1)} [\cos(\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)}) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)})];$$

e portanto o *modulo do producto de imaginarios é egual ao producto dos modulos dos factores, e o seu argumento é egual á somma dos argumentos dos factores.*

Se fôr $z = z' = \ldots = z^{(n-1)}$, vem o resultado importante

$$z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta],$$

conhecido pelo nome de *formula de Moivre,* por ter sido dada por este geometra na sua *Miscellanea analytica,* publicada em 1730.

III. Dividindo por z o imaginario

$$u = r(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$$

vem

$$\frac{u}{z} = \frac{r}{\rho} \frac{(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)} = \frac{r}{\rho} [\cos(\omega - \theta) + i \operatorname{sen}(\omega - \theta)];$$

e portanto o *modulo do quociente de dois imaginarios é egual ao quociente da divisão do modulo do dividendo pelo modulo do divisor, e o seu argumento é egual á differença entre o argumento do dividendo e o argumento do divisor.*

Dividindo este resultado por z', vem

$$\frac{u}{zz'} = \frac{r}{\rho\rho'}[\cos(\omega - \theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\omega - \theta - \theta')].$$

Em geral, temos

$$\frac{u}{zz' \ldots z^{(n-1)}} = \frac{r}{\rho\rho' \ldots \rho^{(n-1)}}[\cos(\omega - \theta - \theta' - \ldots - \theta^{(n-1)}) + i \operatorname{sen}(\omega - \theta - \ldots - \theta^{(n-1)})].$$

Fazendo $r = 1$, $\omega = 0$, $z = z' = \ldots = z^{(n-1)}$, resulta

$$z^{-n} = \rho^{-n}[\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)],$$

convencionando representar $\frac{1}{z^n}$ por z^{-n}, como no caso das quantidades reaes.

Vê-se pois que a *formula de Moivre* ainda tem logar quando o expoente é um numero inteiro negativo.

IV. Passemos á extracção das raizes.

Vejamos se póde ser

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = r(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega).$$

Para ter logar esta egualdade deve ser

$$\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r^n(\cos n\omega + i \operatorname{sen} n\omega),$$

ou

$$\rho\cos\theta = r^n \cos n\omega, \quad \rho \operatorname{sen}\theta = r^n \operatorname{sen} n\omega,$$

d'onde se deduz

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\omega = \theta + 2k\pi,$$

representando por k um inteiro, que póde ter todos os valores positivos e negativos desde $-\infty$ até ∞.

Vem pois [1]

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right]\left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right].$$

---

[1] Este theorema é a generalização, dada por Moivre, de um theorema devido a Côtes (*Harmonia mensurarum*, 1722).

O binomio

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}$$

só tem n valores differentes, correspondentes a $k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1$, pois é facil de ver que, quando a k se dão valores maiores ou menores do que estes, o seno e o coseno, que entram no binomio, retomam os valores correspondentes aos valores precedentes de k.

Logo *a raiz de indice n de qualquer numero tem n valores differentes, que a formula que vimos de achar, determina.*

Das consequencias d'este theorema importante faremos notar as seguintes:

1.º As regras para o calculo dos radicaes foram demonstradas na Arithmetica para o valor unico de cada radical, que lá se considerou. O theorema precedente permitte verificar se estas regras se estendem ou não a todos os n valores do radical.

Assim, para verificar que é

$$\sqrt[n]{z}\,.\,\sqrt[n]{z'}=\sqrt[n]{zz'},$$

basta attender á egualdade

$$\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]\cdot\sqrt[n]{\rho'}\left[\cos\left(\frac{\theta'}{n}+\frac{2k'\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\theta'}{n}+\frac{2k'\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\sqrt[n]{\rho\rho'}\left[\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{n}+\frac{2(k+k')\pi}{n}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\theta+\theta'}{n}+\frac{2(k+k')\pi}{n}\right)\right],$$

cujo primeiro membro representa $\sqrt[n]{z}\,.\,\sqrt[n]{z'}$ e cujo segundo membro representa $\sqrt[n]{zz'}$.

Do mesmo modo se verificam as relações

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{z}}=\sqrt[mn]{z},\quad \sqrt[n]{\frac{z}{z'}}=\frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{z'}}.$$

2.º Elevando ambos os membros da formula considerada á potencia m, e convencionando representar $(\sqrt[n]{z})^m$ por $z^{\frac{m}{n}}$, como no caso das quantidades reaes, vem a formula

$$(\sqrt[n]{z})^m=z^{\frac{m}{n}}=\rho^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta+2k\pi)+i\,\text{sen}\,\frac{m}{n}(\theta+2k\pi)\right].$$

Esta formula mostra que $(\sqrt[n]{z})^m$ tem n valores distinctos, quando n e m são primos entre si, os quaes correspondem aos valores $0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1$ de k. Com effeito, se fossem eguaes

os valores da expressão considerada correspondente aos valores k' e k'', dados a k, teriamos

$$\frac{m}{n}(\theta + 2k'\pi) = \frac{m}{n}(\theta + 2k''\pi) + 2M\pi,$$

ou

$$\frac{m(k' - k'')}{n} = M;$$

portanto n, que é primo com m, deveria dividir $k' - k''$, o que não póde ter logar, por serem k' e k'' menores do que n. Se porém é $n = \alpha p$ e $m = \beta p$, p representando o maior divisor commum de m e n, a mesma formula mostra que $(\sqrt[n]{z})^m$ tem sómente α valores distinctos, que coincidem com os de $(\sqrt[\alpha]{z})^\beta$.

3.º Escrevendo o segundo membro da ultima egualdade do modo seguinte:

$$\rho^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m\theta + 2k'\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{m\theta + 2k'\pi}{n}\right],$$

onde $k' = mk$, vê-se que todos os seus valores coincidem com valores de $\sqrt[n]{z^m}$; logo a egualdade

$$(A) \qquad (\sqrt[n]{z})^m = \sqrt[n]{z^m},$$

tem logar para todos os n valores dos seus dois membros, quando n e m são primos entre si. Quando porém $n = \alpha p$ e $m = \beta p$, temos

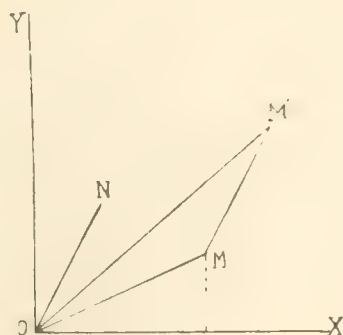
$$(\sqrt[n]{z})^m = (\sqrt[\alpha]{z})^\beta = \sqrt[\alpha]{z^\beta},$$

e a egualdade (A) tem pois logar para os α valores que tem o primeiro membro e para os valores do segundo que coincidem com $\sqrt[\alpha]{z^\beta}$.

12. *Representação geometrica dos imaginarios.* O imaginario $a + bi$ póde ser representado geometricamente pelo ponto M cuja abscissa é a e cuja ordenada é b, e reciprocamente; visto que a cada valor do imaginario corresponde uma posição determinada do ponto M, e a cada posição do ponto corresponde um valor determinado do imaginario.

Representando por ρ o segmento OM e por θ o angulo MOP, temos

$$a + ib = OP + i\,MP = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Logo o segmento OM representa o *modulo* e o angulo MOP representa o *argumento* do imaginario considerado.

Ás operações sobre imaginarios correspondem operações geometricas determinadas.

Assim a somma dos imaginarios $a + ib$ e $a' + ib'$, cujos modulos são ρ e ρ' e cujos argumentos são θ e θ', é representada pelo ponto M', que se obtem tirando primeiramente pela origem das coordenadas um segmento OM, cujo comprimento seja egual a ρ, e que faça com Ox um angulo egual a θ, e em seguida tirando pela extremidade M d'este segmento outro, MM', cujo comprimento seja egual a ρ', e que faça com Ox um angulo egual a θ'. Com effeito, as coordenadas do ponto M' são

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta', \quad \rho \operatorname{sen} \theta + \rho' \operatorname{sen} \theta',$$

e portanto M' representa o imaginario

$$\rho \cos \theta + \rho' \cos \theta' + i(\rho \operatorname{sen} \theta + \rho' \operatorname{sen} \theta'),$$

que coincide com a somma dos imaginarios considerados.

O producto dos mesmos imaginarios é representado por um ponto, cujas coordenadas polares são $\rho\rho'$ e $\theta + \theta'$.

I. Os resultados que precedem podem ainda ser interpretados de outro modo, que convem conhecer.

Para isso, notemos primeiramente que se dá o nome de *vector* a todo o segmento de recta de grandeza e direcção determinadas; que todo o vector se suppõe descripto por um ponto, movendo-se em sentido determinado, partindo de uma extremidade, que se diz *inicial,* até á outra, que se diz *final;* e que dois vectores se dizem *eguaes* quando têem a mesma grandeza e direcção, e são descriptos no mesmo sentido. Notemos, em segundo logar, que o vector OM', que se determina tirando por M um vector MM', egual a ON, se diz *somma* dos vectores OM e ON, e que o vector cuja grandeza é egual a OM $\times$ ON, e que forma com Ox um angulo egual a MOx + NOx, se diz *producto* dos dois vectores.

Posto isto, como a cada ponto do plano corresponde um vector, que tem para extremidade final este ponto e para extremidade inicial o ponto O, vê-se que a todo o imaginario corresponde um vector, que tem o ponto O para extremidade inicial, e reciprocamente. Assim aos imaginarios $a+ib$ e $a'+ib'$ correspondem os vectores OM e ON; á *somma* d'estes imagina rios corresponde o vector OM′, egual á *somma* dos vectores correspondentes ás parcellas $a+ib$ e $a'+ib'$; e ao *producto* dos mesmos imaginarios corresponde um vector, egual ao *producto* dos vectores correspondentes aos factores $a+ib$ e $a'+ib'$.

As operações sobre vectores, que vêem de ser consideradas, são uma generalização das operações sobre segmentos consideradas na Geometria elementar; e da correspondencia, que vem de ser indicada, entre aquellas operações e as operações sobre imaginarios resulta que as operações sobre vectores se sujeitam ás leis fundamentaes consideradas no n.º 1.

A representação geometrica dos imaginarios e das suas operações foi dada pela primeira vez por Wessel em uma memoria apresentada em 1797 á Academia das Sciencias de Copenhague, a qual ficou por muito tempo desconhecida, e depois por Gauss, Argand, etc. O methodo de investigação geometrica que d'ella resulta foi applicado principalmente por Bellavitis á resolução de muitas questões de Geometria, e abriu o caminho a varios methodos analytico-geometricos com que Grassmann, Hamilton, etc. enriqueceram a sciencia, nos quaes se consideram operações sobre segmentos de recta que se sujeitam a algumas das leis fundamentaes indicadas no n.º 1.

IV

Noção de limite

13. A noção de *limite* appareceu já na Arithmetica e nos Elementos de Geometria, onde se disse que uma quantidade constante A é o *limite* para que tende uma quantidade variavel u, se os valores successivos da variavel se approximam indefinidamente da constante, de tal modo que o valor absoluto da differença $A-u$ possa tomar e conservar um valor menor do que qualquer grandeza dada, por mais pequena que seja.

Em termos mais precisos póde dizer-se que *uma quantidade constante A é o limite para que tende uma quantidade variavel u, que passa por uma infinidade de valores successivos $u_1, u_2, u_3, \ldots$, quando a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um numero n_1 tal que a desegualdade*

$$(1) \qquad |A-u_n|<\delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1.

Assim, por exemplo, se os valores successivos da variavel u forem eguaes a x, x^2, x^3, $\ldots$, x^n, $\ldots$, x representando uma quantidade inferior á unidade, em valor absoluto, temos,

pondo $|x| = \frac{1}{1+h}$, onde $h > 0$,

$$|x|^n = \frac{1}{(1+h)^n} = \frac{1}{1+nh+\frac{n(n-1)}{1.2}h^2+\ldots} < \frac{1}{1+nh}.$$

Dando pois a n valores que satisfaçam á condição

$$\frac{1}{1+nh} < \delta,$$

isto é valores superiores a $\frac{1-\delta}{h\delta}$, vem $|x|^n < \delta$. Logo u tende para *zero* (¹).

Da definição precedentemente dada deduzem-se immediatamente as consequencias seguintes:

1.º *A variavel u não póde tender ao mesmo tempo para dois limites differentes.* Com effeito, se u tendesse tambem para uma quantidade B, differente de A, existiria um numero n_2 tal que seria

$$|B - u_n| < \delta,$$

quando $n > n_2$. Logo a desegualdade (n.º 11-I)

$$|A - B| = |A - u_n + u_n - B| \overline{\gtrless} |A - u_n| + |B - u_n| < 2\delta$$

seria satisfeita pelos valores de n superiores a n_1 e n_2; o que é absurdo, visto que δ é tão pequeno quanto se queira e $A - B$ é constante.

2.º *Se os valores successivos de uma variavel u estão constantemente comprehendidos entre os valores correspondentes de duas quantidades variaveis v e w, que tendem para o mesmo limite* A, *u tende tambem para* A. Com effeito, como as desegualdades

$$|A - v_n| < \delta, \qquad |A - w_n| < \delta$$

são satisfeitas, por hypothese, a primeira pelos valores de n superiores a um numero n_1 e a segunda pelos valores de n superiores a n_2, as duas desegualdades são satisfeitas, ao mesmo tempo, pelos valores de n superiores ao maior dos numeros n_1 e n_2. Porisso e porque, $A - u_n$ estando comprehendida entre $A - v_n$ e $A - w_n$, $|A - u_n|$ é inferior a um dos numeros $|A - v_n|$

(¹) No *Corso di Analisi algebrica* de Cesàro (Torino, 1894) são dados muitos exemplos interessantes de determinações de limites.

ou $|A - u_n|$, a desegualdade

$$|A - u_n| < \delta$$

é satisfeita por estes mesmos valores de n, e portanto u tende para A.

3.º *Se os valores successivos da variavel u são todos inferiores a um numero L, u não póde tender para um numero superior a L.* Com effeito, temos por hypothese

$$A - u_n > A - L.$$

Logo, se fosse $A > L$, não podia ter logar a desegualdade (1) quando a δ se dessem valores inferiores a $A - L$.

4.º *Se os valores successivos da variavel u são todos superiores a um numero L, u não póde tender para um numero inferior a L.* Com effeito, temos

$$u_n - A > L - A.$$

Logo, se fosse $A < L$, a desegualdade (1) não poderia ter logar quando fosse $\delta < L - A$.

11. O problema que consiste em procurar se uma quantidade variavel tende ou não para um limite, póde ser substituido por outro, em que se procura se uma certa quantidade tende ou não para zero, em virtude do seguinte theorema importante [1]:

Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ os valores successivos que toma a variavel u. É condição necessaria e sufficiente para que u tenda para um limite, que a cada valor dado á quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1, tal que a desegualdade

$$(2) \qquad |u_{n+p} - u_n| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de n, superiores a n_1, combinados com todos os valores de p.

Com effeito, se u tende para um limite A, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um valor n_1, tal que as desegualdades

$$|u_{n+p} - A| < \frac{1}{2}\delta, \quad |u_n - A| < \frac{1}{2}\delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1. Logo tambem é satisfeita pelos mesmos

[1] Este principio foi enunciado pela primeira vez por Bolzano, em 1817, no *Bulletim da Sociedade Real das Sciencias de Praga*, e depois, em 1821, por Cauchy no seu *Cours d'Analyse*.

valores de n a desegualdade (2), visto que é

$$\text{mod}(u_{n+p} - u_{n+q}) \overline{\overline{<}}\ \text{mod}(u_{n+p} - A) + \text{mod}(A - u_{n+q}) < \delta.$$

Demonstremos agora que, reciprocamente, quando a desegualdade (2) tem logar, u tende para um limite.

Dê-se a δ um valor particular δ_1 e represente-se por α o valor correspondente de n_1. Por ser, por hypothese,

$$\text{mod}(u_{n+p} - u_{\alpha+1}) < \delta_1,$$

quando $n > \alpha$, os valores correspondentes de u_{n+p} estão comprehendidos entre as quantidades $u_{\alpha+1} - \delta_1$ e $u_{\alpha+1} + \delta_1$, que representaremos por v_1 e w_1.

Dê-se em seguida a δ o valor δ_2, menor do que δ_1, e seja β o valor correspondente de n_1. Vê-se do mesmo modo que os valores que toma u_{n+p}, quando $n > \beta$, estão comprehendidos entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$. Logo os valores que toma u_{n+p}, quando a n se dão valores que satisfazem ao mesmo tempo ás duas condições $n > \alpha$ e $n > \beta$, estão comprehendidos entre v_1 e w_1 e entre $u_{\beta+1} - \delta_2$ e $u_{\beta+1} + \delta_2$, e portanto entre a maior das quantidades v_1 e $u_{\beta+1} - \delta_2$, que representaremos por v_2, e a menor das quantidades w_1 e $u_{\beta+1} + \delta_2$, que representaremos por w_2; e vê-se que é

$$v_2 > v_1,\ w_2 < w_1,\ w_2 - v_2 = u_{\beta+1} + \delta_2 - (u_{\beta+1} - \delta_2) = 2\delta_2,$$

quando $u_{\beta+1} + \delta_2 < w_1$ e $u_{\beta+1} - \delta_2 > v_1$, e

$$v_2 \overline{>} v_1,\ w_2 \overline{\overline{<}} w_1,\ w_2 - v_2 < u_{\beta+1} + \delta_2 - (u_{\beta+1} - \delta_2) = 2\delta_2,$$

nos outros casos.

Continuando do mesmo modo, forma-se um grupo de numeros crescentes

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_m,\ \ldots$$

e um grupo de numeros decrescentes

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_m\ \ldots,$$

que satisfazem á condição

$$w_m - v_m \overline{\overline{<}}\ 2\delta_m,$$

e definem portanto (n.º 6) um numero racional ou irracional c, comprehendido entre w_m e v_m;

e vê-se que u_{n+p} está tambem comprehendido entre v_m e w_m, quando n é maior do que as m quantidades α, β, etc. Temos pois a desegualdade

$$|c - u_{n+p}| \overline{\overline{<}} 2\delta_m,$$

que é satisfeita pelos valores de $n+p$ superiores a α, β, etc., da qual se conclue que u tende para c.

Corollarios. 1.º *Se a quantidade variavel u cresce constantemente, sem todavia poder exceder um valor determinado* L, *u tende para um limite.*

Com effeito, se u não tendesse para um limite determinado, existiria, em virtude do theorema precedente, um valor de δ tal que, por maior que fosse o inteiro n_1, a desegualdade

$$u_{n+p} - u_n \geqq \delta$$

seria satisfeita por um valor α, superior a n_1, dado a n, e por um valor a, dado a p. Teriamos pois

$$u_{\alpha+a} \geqq u_\alpha + \delta.$$

Pela mesma razão deveria existir um numero β, superior a $\alpha + a$, e um inteiro b, tal que

$$u_{\beta+b} > u_\beta + \delta,$$

ou, por ser $u_\beta > u_{\alpha+a}$,

$$u_{\beta+b} > u_{\alpha+a} + \delta > u_\alpha + 2\delta.$$

Continuando do mesmo modo, obteriamos a desegualdade

$$u_{\omega+l} > u_\alpha + k\delta,$$

cujo segundo membro poderia tornar-se superior a L, dando a k um valor sufficientemente grande, e da qual resultaria o poder u tornar-se maior que L, o que é contra a hypothese.

2.º *Se a quantidade variavel u decresce constantemente, sem todavia poder ser inferior a um numero l determinado, u tende para um limite.*

Demonstra-se este corollario de um modo semelhante ao que foi empregado para demonstrar o anterior.

15. Seja agora u uma quantidade variavel, cujos valores dependem dos valores de outra quantidade variavel x, que póde ter todos os valores visinhos de um numero a, ou sómente os valores que satisfazem a certas condições, como por exemplo, á de serem maiores do que a,

ou á de serem menores do que a, etc. A definição de limite e os principios anteriores levam ás consequencias seguintes:

1.º *É condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A, quando x tende para a, e para que este limite seja unico, qualquer que seja a serie de valores pelos quaes passe x, que a cada valor que se dê á quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero ε tal que a desegualdade*

$$(3) \qquad |A - u| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de x que satisfazem á condição

$$(4) \qquad |x - a| < \varepsilon.$$

Com effeito, sendo $x_1, x_2, x_3, \ldots$ uma serie qualquer de valores de x, que tendam para a, e $u_1, u_2, u_3, \ldots$ os valores correspondentes de u, se a desegualdade (3) é satisfeita por todos os valores de u que correspondem aos valores que tem x entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, é satisfeita pelos numeros u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc., que correspondem aos numeros x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, etc., comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$. Logo (n.º 13) os numeros $u_1, u_2, u_3, \ldots$ tendem para A.

Reciprocamente, se a todo o grupo $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de valores de x, que tendam para a, corresponder um grupo $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ de valores de u, que tendam para A, a cada valor de δ corresponde um numero positivo ε tal que a desegualdade (3) tem logar quando $|x - a| < \varepsilon$. Com effeito, se aquella desegualdade não tivesse logar, existiria um valor de δ tal que, por menor que fosse o valor ε_i que se desse a ε, seria

$$(\alpha) \qquad |A - u| \geqq \delta$$

para algum valor x_i de x tal que $|x_i - a| < \varepsilon_i$. Dando depois a ε um valor ε_j tal que $\varepsilon_j < |x_i - a|$, existiria um valor x_j de x, satisfazendo á condição $|x_j - a| < \varepsilon_j$, pelo qual a mesma desegualdade (α) seria satisfeita. Continuando do mesmo modo e escolhendo os numeros $\varepsilon_i, \varepsilon_j, \ldots$ de modo que tendam para zero, obter-se-ia uma serie de numeros $x_i, x_j, x_l, \ldots$, tendendo para a, taes que, quando se fizesse passar x por elles, a quantidade u não tenderia para A, o que é contrario á hypothese.

2.º *Se a cada serie de valores de x, que tendem para a, corresponde uma serie de valores de u, que tendem para um limite, este limite é o mesmo para todas as series.*

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$ duas series de valores pelos quaes passa x quando tende para a, e sejam A e A' os limites correspondentes para que tende u. Para ver que é A = A', basta notar que, se A fosse differente de A', fazendo passar x por uma terceira serie

de valores, composta dos numeros das duas series anteriores, dispostos alternadamente, os valores de u tenderiam para A e A', o que é contrario á hypothese.

3.º *E condição necessaria e sufficiente para que u tenda para um limite, quando x tende para a, e para que este limite seja unico, qualquer que seja a serie de valores pelos quaes passe x, que a cada valor dado á quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero positivo ε tal que a desegualdade*

$$(5) \qquad |u'' - u'| < \delta$$

seja satisfeita por todos os pares de valores, u' e u'', de u, correspondentes aos valores x' e x'' de x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon$.

Com effeito, se u tende para A, quando x tende para a, a cada valor dado á quantidade positiva δ corresponde um numero ε tal que as desegualdades

$$|u' - A| < \frac{1}{2}\delta, \quad |u'' - A| < \frac{1}{2}\delta$$

são satisfeitas por todos os pares de valores, u' e u'', de u que correspondem a valores de x que satisfaçam á condição $|x - a| < \varepsilon$; e portanto a desegualdade

$$|u'' - u'| \overline{<} |u' - A| + |u'' - A| < \delta$$

é satisfeita pelos mesmos valores de u' e u''.

Para demonstrar que, reciprocamente, se a cada valor de δ corresponde um numero ε tal que a desegualdade (5) é satisfeita por todos os pares de valores, u' e u'', de u que correspondem aos valores de x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon$, u tende para A, basta notar que, sendo, como anteriormente, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ uma serie qualquer de valores que tendam para a, e $u_1, u_2, u_3, \ldots$ os valores correspondentes de u, a desegualdade (5) é satisfeita, por hypothese, quando u' e u'' representam dois quaesquer dos numeros $u_m, u_{m+1}, \ldots$, correspondentes aos numeros $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$, comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$. Portanto, quando x passa pela serie de valores considerados, u tende para um limite (n.º 14) e este limite é unico (n.º 15-2.º).

4.º *Se u cresce constantemente, quando x se approxima constantemente de a, sem poder exceder um numero L, u tende para um limite, quando x tende de qualquer modo para a, e este limite é unico.*

Com effeito, seja $x_1, x_2, x_3, \ldots$ uma serie de valores de x que se approximem constantemente de a e que tendam para a. Os valores correspondentes de u tendem para um limite A, em virtude do primeiro corollario do n.º 14; e porisso existe um numero m tal que a desegualdade $|u - A| < \delta$ é satisfeita pelos valores de u que correspondem aos valores $x_m, x_{m+1}, \ldots$ de x.

Considerando outra serie qualquer ($x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$) de valores de x que tendam para a, sem ser necessario que se approximem constantemente de a, a mesma desegualdade é satisfeita, por hypothese, pelos valores $x'_n, x'_{n+1}, \ldots$, comprehendidos entre x_m e a; logo, quando x passa por esta serie de valores u, tende ainda para o limite A.

Um theorema analogo tem logar quando u decresce constantemente, sem se tornar inferior a um numero l.

16. Para designar que u tende para A, quando x tende para a, escreve se ([1]):

$$\lim_{x=a} u = A.$$

Muitas questões importantes de Analyse levam a procurar o limite para que tendem quantidades dadas. Os principios seguintes facilitam esta indagação.

1.º *O limite para que tende a somma de duas quantidades variaveis, dependentes de x, que tendem para limites determinados, quando x tende para a, existe e é egual á somma dos limites para que tendem as parcellas.*

Sejam u e v duas quantidades variaveis, dependentes de x, que tendam para os limites A e B, quando x tende para a.

A cada valor dado a δ corresponde, por hypothese, uma quantidade positiva ε' tal que a desegualdade

$$|A - u| < \frac{1}{2}\delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon'$.

Do mesmo modo, existe uma quantidade positiva ε'' tal que a desegualdade

$$|B - v| < \frac{1}{2}\delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon''$.

Logo, representando por ε a menor das quantidades ε' e ε'', a desegualdade (n.º 11-I)

$$|A - u + B - v| < \delta$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que satisfazem á condição $|x - a| < \varepsilon$; e portanto a quantidade $u + v$ tende para o limite A + B.

---

(1) Em toda esta obra, quando dissermos que uma variavel u tende para um limite, quando outra variavel, da qual a primeira depende, tende tambem para um limite, sem especificar a serie de valores pelos quaes passa esta ultima, suppomos que isto tem logar qualquer que seja esta serie de valores.

2.º *O limite para que tende o producto uv existe e é egual ao producto dos limites para que tendem os factores.*

Deduz-se este principio da identidade

$$AB - uv = A(B - v) + v(A - u).$$

Com effeito, a cada valor dado a δ' corresponde um numero ε' tal que a desegualdade

$$|A - u| < \delta'$$

é satisfeita pelos valores da variavel x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon'$. Chamando porém M um numero maior do que os valores que toma $|v|$ quando a x se dão todos os valores que satisfazem á condição precedente, vem

$$M|A - u| < M\delta'$$

e portanto, pondo $M\delta' = \frac{1}{2}\delta$,

$$|v||A - u| < \frac{1}{2}\delta.$$

Esta desegualdade é pois satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon'$.

Do mesmo modo se vê que ha sempre um valor ε'' tal que a desegualdade

$$|A||B - v| < \frac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon''$.

Logo a desegualdade

$$|AB - uv| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de x que verificam a condição $|x - a| < \varepsilon$; e portanto uv tende para o limite AB.

3.º *O limite para que tende o quociente $\frac{u}{v}$ existe e é egual ao quociente dos limites para que tendem u e v, quando v não tende para zero.*

Com effeito, pondo

$$\frac{u}{v} = w, \quad \frac{A}{B} = C,$$

temos a identidade

$$w - C = \frac{u - A}{v} + \frac{A(B - v)}{Bv}.$$

Mas mostra-se, como no caso anterior, que, dado δ, existe sempre um valor ε tal que as deseguadades

$$\left|\frac{u-A}{v}\right| < \frac{1}{2}\delta, \quad \left|\frac{A(B-v)}{Bv}\right| < \frac{1}{2}\delta$$

são satisfeitas pelos valores de x que verificam a condição $|x-a| < \varepsilon$.

Logo a deseguadade

$$|w-C| < \delta$$

é satisfeita pelos mesmos valores de x; e portanto $\frac{u}{v}$ tende para $\frac{A}{B}$.

4.º *O limite para que tende* $\sqrt[n]{u}$, *quando* u *é positivo e tende para* A, *existe e é egual a* $\sqrt[n]{A}$.

Pondo com effeito na identidade conhecida

$$k^n - l^n = (k-l)(k^{n-1} + lk^{n-2} + \ldots + l^{n-1})$$

$k = \sqrt[n]{u}$, $l = \sqrt[n]{A}$, vem o resultado seguinte:

$$\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{A} = \frac{u-A}{\sqrt[n]{u^{n-1}} + \sqrt[n]{A}\sqrt[n]{u^{n-2}} + \ldots + \sqrt[n]{A^{n-1}}}.$$

Se representarmos pois por B um numero positivo, inferior a A, vê se que u, tendendo para A, póde tornar-se maior do que B e que é, para os valores de u que satisfazem a esta condição,

$$|\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{A}| < \frac{|u-A|}{n\sqrt[n]{B^{n-1}}}.$$

Suppondo agora

$$\frac{|u-A|}{n\sqrt[n]{B^{n-1}}} < \delta, \quad n\delta\sqrt[n]{B^{n-1}} = \varepsilon,$$

vê-se que a cada valor de δ corresponde um numero ε tal que é $|\sqrt[n]{u} - \sqrt[n]{A}| < \delta$, quando $|u-A| < \varepsilon$, e portanto que $\sqrt[n]{u}$ tende para $\sqrt[n]{A}$, quando u tende para A.

17. Tudo o que se disse nos numeros precedentes estende-se facilmente ao caso de u depender de muitas quantidades variaveis x, y, z, etc. Assim, temos primeiramente:

É condição necessaria e sufficiente para que u tenda para o limite A, quando x, y, etc. tendem respectivamente para a, b, etc., e para que este limite seja unico, quaesquer que sejam os valores pelos quaes passem estas variaveis, que a cada valor dado á quantidade positiva δ,

por mais pequeno que seja, corresponda um numero ε *tal que a desegualdade*

$$(3) \qquad |A - u| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de x, y, *etc. que verificam as condições*

$$(6) \qquad |x - a| < \varepsilon, \quad |y - b| < \varepsilon, \quad \text{etc.}$$

Com effeito, sendo $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$, etc. series de valores que tendam respectivamente para a, b, ... e u_1, u_2, u_3, ... os valores de u correspondentes aos valores $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, ..., se a desegualdade $|A - u| < \delta$ é satisfeita por todos os valores de u que correspondem aos valores que tomam respectivamente x, y, ... entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, entre $b - \varepsilon$ e $b + \varepsilon$, etc., é satisfeita pelos numeros u_m, u_{m+1}, ..., que correspondem aos valores $(x_m, x_{m+1}, \ldots)$, $(y_m, y_{m+1}, \ldots)$, etc., respectivamente comprehendidos entre $a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$, entre $b - \varepsilon$ e $b + \varepsilon$, etc. Logo os numeros u_1, u_2, ... tendem para A.

Para demonstrar a proposição reciproca, supponhamos que u tende para A, e vamos primeiramente mostrar que se póde determinar ε de modo que a desegualdade (3) seja satisfeita pelos valores de x, y, ... que satisfazem á condição

$$(7) \qquad |x - a| + |y - b| + \ldots < m\varepsilon,$$

onde m representa o numero das variaveis x, y, ...

Com effeito, se isto não tivesse logar, mostrava-se como no n.º 15-1.º a possibilidade de formar series $(x_i, x_j, \ldots)$, $(y_i, y_j, \ldots)$, etc. de valores de x, y, ..., que tenderiam respectivamente para os limites a, b, ..., taes que u não tenderia para A quando x, y, ... passassem por estes valores. Basta agora notar que a desegualdade (7) é satisfeita pelos valores de x, y, ... que satisfazem ás condições (6), para concluir que a desegualdade (3) é satisfeita pelos mesmos valores de x, y, etc.

A extensão dos outros principios demonstrados nos numeros anteriores ao caso de muitas variaveis não tem difficuldade alguma.

18. Diz-se que uma quantidade variavel *tende para* ∞, quando esta quantidade augmenta indefinidamente de tal modo que chega a ser e a conservar-se superior a todo o numero dado, por maior que seja, e diz-se que uma quantidade variavel *tende para* $-\infty$, quando esta quantidade é negativa e o seu valor absoluto tende para ∞.

Assim, por exemplo, os valores por que passa x^n, quando n passa pelos valores 1, 2, 3, 4, ..., tendem para ∞, quando $|x| > 1$. Pondo com effeito $|x| = 1 + h$, onde $h > 0$, temos

$$|x|^n = (1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \ldots > 1 + nh;$$

e basta attender a que o ultimo membro d'esta desegualdade se póde tornar maior do que qualquer numero k, dando a n valores superiores a $\frac{k-1}{h}$, para concluir que x^n tende para ∞.

Se notarmos que $\frac{1}{x}$ tende para 0, quando x tende para o infinito, e que tende para o infinito, quando x tende para 0, podemos dos theoremas anteriormente demonstrados para o caso de x tender para um limite a deduzir outros correspondentes para o caso de x tender para o infinito. Assim, por exemplo, podemos enunciar o theorema seguinte:

A somma, o producto e o quociente de duas funcções u e v que tendem para os limites A *e* B, *quando x tende para o infinito, tendem respectivamente para* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, AB *e* $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, *quando* B *é differente de zero.*

Com effeito, u e v tendendo para A e B, quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, $u+v$, uv, $\frac{u}{v}$ tendem para $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, AB, $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, quando $\frac{1}{x}$ tende para 0, isto é quando x tende para o infinito.

19. Consideremos agora a quantidade imaginaria $u+iv$, que passa successivamente pelos valores u_1+iv_1, u_2+iv_2, etc. Se u tende para A e v tende para B, diz-se que esta quantidade tende para o limite $\mathrm{A}+i\mathrm{B}$.

São consequencias immediatas desta definição os principios seguintes:

I. *É condição necessaria e sufficiente para que $u+iv$ tenda para o limite $A+iB$, que o módulo da differença entre a quantidade $u+iv$ e $A+iB$ tenda para zero.*

Com effeito, se u e v tendem para A e B, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor n_1 tal que as desegualdades

$$|A-u_n|<\delta,\quad |B-v_n|<\delta$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1. Logo a desegualdade

$$|A-u_n-i(B-v_n)|=\sqrt{(A-u_n)^2+(B-v_n)^2}<\delta\sqrt{2}$$

é satisfeita pelos mesmos valores de n, e o módulo considerado tende portanto para zero.

Reciprocamente, se é

$$\sqrt{(A-u_n)^2+(B-v_n)^2}<\delta\sqrt{2},$$

quando $n>n_1$, é tambem

$$|A-u_n|<\delta\sqrt{2},\quad |B-v_n|<\delta\sqrt{2},$$

e portanto u tende para A e v tende para B.

II. *É condição necessaria e sufficiente para que $u+iv$ tenda para um limite, que a cada valor que se dê á quantidade δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1 tal que a desegualdade*

$$(8) \qquad |u_{n+p}-u_n+i(v_{n+p}-v_n)|<\delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p.

Deduz-se facilmente este theorema da igualdade (n.º 11)

$$|u_{n+p}-u_n+i(v_{n+p}-v_n)|=+\sqrt{(u_{n+p}-u_n)^2+(v_{n+p}-v_n)^2}.$$

Com effeito, se $u+iv$ tende para um limite, a cada valor da quantidade δ corresponde um valor n_1 tal que as desegualdades (n.º 14)

$$|u_{n+p}-u_n|<\frac{\delta}{\sqrt{2}},\quad |v_{n+p}-v_n|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

são satisfeitas pelos valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p. Logo tambem a desegualdade (8) é satisfeita pelos mesmos valores de n e p, o que demonstra a primeira parte do theorema.

Reciprocamente, se δ representa uma quantidade tão pequena quanto se queira, e é satisfeita a desegualdade (8) quando $n>n_1$, qualquer que seja p, temos

$$(u_{n+p}-u_n)^2+(v_{n+p}-v_n)^2<\delta^2;$$

logo as desegualdades

$$|u_{n+p}-u_n|<\delta,\quad |v_{n+p}-v_n|<\delta$$

são satisfeitas pelos mesmos valores de n e p. As variaveis u e v tendem pois (n.º 11) para limites determinados, assim como $u+iv$.

V

Series

20. *Series de termos reaes.* — As series são expressões da fórma

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

em que o numero das parcellas é infinito. O termo u_n é o *termo geral*, por meio do qual se formam todos os outros dando a n os valores 1, 2, 3, etc. Empregando o signal Σ para designar sommas, esta expressão póde ser escripta do modo seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Se a somma dos n primeiros termos da serie, isto é, a somma

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

tende para um limite determinado, quando n augmenta indefinidamente, diz-se que a serie é *convergente*. Este limite chama-se *somma da serie*.

As series que não são convergentes chamam-se *divergentes*.

Exemplo 1.º — A progressão geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

é convergente, quando o valor absoluto da razão x é menor do que a unidade, pois que a somma dos seus n primeiros termos

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

tende para o limite $\frac{1}{1-x}$, quando n augmenta indefinidamente.

Podemos pois escrever

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, ou se é $x=1$, a somma s_n tende para o infinito e a serie é divergente.

Se é $x=-1$, a somma s_n toma alternadamente os valores *zero* e *um*, e portanto a serie é divergente.

Exemplo 2.º — A serie importante

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}+\ldots \tag{2}$$

é *convergente* quando $a>1$, e é *divergente* quando $a=1$ ou $a<1$.

Seja primeiramente $a>1$. Reuuindo os termos em grupos de $1, 2, 4, \ldots, 2^b, \ldots$ termos, a série considerada póde ser escripta do modo seguinte:

$$\frac{1}{1^a}+\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}\right)+\left(\frac{1}{4^a}+\ldots+\frac{1}{7^a}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{(2^b)^a}+\frac{1}{(2^b+1)^a}+\ldots+\frac{1}{(2^{b+1}-1)^a}\right]+\ldots$$

Notando agora que a somma dos termos de cada grupo é menor do que o producto do primeiro termo pelo numero dos seus termos, temos

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}<\frac{1}{2^{a-1}},$$

$$\frac{1}{4^a}+\ldots+\frac{1}{7^a}<\frac{1}{2^{2(a-1)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(2^b)^a}+\frac{1}{(2^b+1)^a}+\ldots+\frac{1}{(2^{b+1}-1)^a}<\frac{1}{2^{b(a-1)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

e portanto

$$\frac{1}{1^a}+\frac{1}{2^a}+\ldots+\frac{1}{n^a}<1+\frac{1}{2^{a-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{b(a-1)}}+\ldots$$

ou

$$s_n<\frac{2^{a-1}}{2^{a-1}-1}.$$

O segundo membro d'esta deseguualdade tem um valor determinado; logo o primeiro

membro, que augmenta com n sem poder exceder este valor, tende para um limite, e a serie proposta é portanto convergente.

No caso de ser $a = 1$, a serie (2) tem o nome de *serie harmonica* e é divergente. Para o demonstrar, basta dispôr os seus termos em grupos de 1, 2, 4, ..., 2^b, ... termos, do modo seguinte:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^b + 1} + \frac{1}{2^b + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{b+1}}\right) + \ldots$$

Com effeito, notando que a somma dos termos de cada grupo é maior do que o producto do ultimo termo do grupo pelo numero de termos, temos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} > \frac{1}{2},$$

. . . .

$$\frac{1}{2^b + 1} + \frac{1}{2^b + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{b+1}} > \frac{1}{2},$$

. . . .

Logo a somma s_n dos n primeiros termos da serie (2) póde tornar-se maior do que $\frac{m}{2}$, por maior que seja o valor do inteiro m, dando a n um valor sufficientemente grande; e a serie é portanto divergente.

Se é $a < 1$, temos

$$s_n = \frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Quando n tende para o infinito, o segundo membro d'esta desegualdade tende para o infinito; logo tambem tende para o infinito o primeiro membro, e a serie proposta é portanto divergente.

Os geometras da antiga Grecia empregaram para o calculo de certas quantidades processos equivalentes ao uso de verdadeiras series. Este algorithmo só foi porém directamente considerado no seculo XVII, depois da publicação da *Arithmetica infinitorum* de Wallis, na qual se encontra um modo de determinar a área de qualquer curva, quando se sabe exprimir as ordenadas por serie ordenada segundo as potencias da abscissa.

*

Mercator e Brounker publicaram em 1668 os primeiros exemplos de taes desenvolvimentos. Mas o principal inventor do methodo das series foi Newton, que ensinou a calcular por meio d'ellas as expreesões algebricas, as raizes das equações algebricas, as expressões trigonometricas, etc., e que não só as applicou ao calculo das areas, seguindo a ideia de Wallis, mas tambem á rectificação das curvas. Sabe-se que estes importantes resultados foram obtidos pelo grande geometra antes de 1668, mas só foram publicados em 1704 em um appendice á sua *Optica,* intitulado *De quadratura curvarum,* e de novo em 1711 na sua *Analysis per aequationes numerorum terminorum infinitas.* N'este intervallo de tempo occuparam-se tambem das series J. Gregory e Leibnitz.

A partir d'esta epocha foram as series empregadas em mathematica com grande successo. Apesar porém de se reconhecer, desde os primeiros tempos em que foram usadas, a necessidade de serem convergentes, para determinarem os valores das quantidades, os geometras durante muito tempo extenderam a este algorithmo as operações e theoremas relativos ás expressões compostas de um numero finito de parcellas, sem procurar as condições para que esta extensão fosse legitima. Foi sómente no ultimo seculo que foram fixadas as regras para o seu calculo por Cauchy, no seu *Cours d'Analyse,* e por Abel, Dirichlet, Gauss e Riemann, em trabalhos sobre series particulares, que os levaram a estudar questões geraes relativas a estas expressões. Outros geometras se occuparam depois d'este assumpto, já enriquecendo-o com novos theoremas, já generalisando os anteriores.

21. Do theorema demonstrado no n.º 14 tiram-se immediatamente os dous principios seguintes, conhecidos pelo nome de *principios geraes de convergencia* e *divergencia:*

1.º — *Se a serie* (1) *é convergente, a cada valor dado á quantidade positiva* δ, *por mais pequeno que seja, corresponde um numero* n_1 *tal que a desegualdade*

$$s_{n+p} - s_n = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n *superiores a* n_1, *qualquer que seja* p.

2.º — *Reciprocamente, se a cada valor dado á quantidade positiva* δ, *por mais pequeno que seja, corresponde um numero* n_1 *tal que a desegualdade*

$$s_{n+p} - s_n < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n *superiores a* n_1, *a serie* (1) *é convergente.*

Destes principios tira-se, pondo $p = 1$, o corollario seguinte:

É condição necessaria (mas não sufficiente) para que a serie (1) *seja convergente, que o valor dos seus termos tenda para zero, qnando a ordem d'elles augmenta indefinidamente.*

22. Não ha criterio geral para decidir se uma serie dada é convergente; ha apenas regras abrangendo maior ou menor numero de casos. Aqui exporemos apenas as seguintes:

I. *Sejam*

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots,\quad v_1+v_2+\dots+v_n+\dots$$

duas series compostas de termos positivos, e seja p um numero determinado. Se, a partir do termo de ordem p, é sempre $u_m<v_m$ e a segunda serie é convergente, a primeira tambem é convergente; se, pelo contrario, é $u_m>v_m$ e a segunda serie é divergente, a primeira tambem é divergente.

Com effeito, se é $u_m<v_m$ quando $m>p$, temos

$$u_1+\dots+u_{p-1}+u_p+\dots+u_n<u_1+\dots+u_{p-1}+v_p+\dots+v_n,$$

e portanto, representando s_n e s'_n as sommas dos n primeiros termos da primeira e da segunda serie e s' o limite para que tende s'_n, quando n augmenta indefinidamente,

$$s_n<s'_n+u_1+\dots+u_{p-1}<s'+u_1+\dots+u_{p-1}.$$

A somma s_n augmenta pois indefinidamente com n, sem poder exceder o valor que tem o segundo membro d'esta desegualdade; logo (n.º 14) tende para um limite determinado.

Se, pelo contrario, é $u_m>v_m$ e a segunda serie é divergente, temos a desegualdade

$$u_1+u_2+\dots+u_{p-1}+u_p+\dots+u_n>v_p+v_{p+1}+\dots+v_n$$

ou

$$s_n>s'_n-(v_1+v_2+\dots+v_{p-1}),$$

cujo segundo membro augmenta indefinidamente com n; logo tambem o primeiro membro augmenta indefinidamente com n, e portanto a primeira serie é divergente.

Por exemplo, a serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^3}+\dots+\frac{1}{(n+1)^n}+\dots$$

é convergente, pois que cada termo, a partir do terceiro, é menor do que o termo correspondente da progressão geometrica convergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

II. *Toda a serie composta de termos positivos e negativos, de que deriva uma serie convergente pela mudança dos signaes dos termos negativos, é convergente* [1].

---

[1] Cauchy: *Cours d'Analyse*, cap. VI.

Com effeito, a serie

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

sendo, por hypothese, convergente, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, deve corresponder (n.º 21–1.º) um numero n_1 tal que

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p. D'aqui conclue-se que a desegualdade (n.º 11–I)

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \delta$$

tambem é satisfeita pelos mesmos valores de n, e portanto que a serie (1) é convergente.

As series que estão no caso indicado neste theorema, isto é as series formadas de termos cujos valores absolutos formam uma serie convergente, chamam-se *absolutamente convergentes*.

III. *Se, para todos os valores de n a partir de um valor p, a razão* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *dos valores absolutos de dous termos consecutivos da serie* (1) *é sempre menor do que uma quantidade L, inferior á unidade, a serie é convergente; se esta razão é maior do que a unidade, a serie é divergente* ([1]).

Este criterio importante, devido a D'Alembert, resulta da comparação da serie proposta com uma progressão geometrica, como vamos vêr.

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < L\,|u_p|, \quad |u_{p+2}| < L\,|u_{p+1}|, \text{ etc.};$$

logo os termos da serie

$$(3) \qquad |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

são, a partir do termo de ordem p, menores do que os termos correspondentes da serie

$$|u_1| + |u_1| + \ldots + |u_{p-1}| + |u_p|\,(1 + L + L^2 + \ldots),$$

que é convergente quando $L < 1$, por ser neste caso convergente a progressão

$$1 + L + L^2 + \ldots$$

([1]) Vejam-se nos tomos VII e VIII do *Jornal de Sciencias mathematicas* algumas observações interessantes de *Lerch*, *Cesàro*, *Gutzmer* e *Ed. Weyr* a respeito d'este theorema e dos dois seguintes.

Logo a serie (3) é convergente (th. I), assim como a serie (1) (th. II).

Se é, pelo contrario,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1,$$

o valor absoluto dos termos da serie (1), a partir do termo de ordem p, cresce com n, e portanto a serie é divergente (n.º 21).

COROLLARIO. — *Se a razão* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ *tende para um limite determinado, quando n augmenta indefinidamente, a serie é convergente se este limite é menor do que a unidade, e é divergente se este limite é maior do que a unidade.*

Sejam l este limite e L um valor comprehendido entre l e 1.

Os valores que toma a quantidade $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ podem approximar-se de l tanto que seja

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L < 1,$$

quando $l < 1$, e

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1,$$

quando $l > 1$, dando para isso a n valores superiores a um numero sufficientemente grande p. Em virtude do theorema precedente a serie é pois convergente no primeiro caso e divergente no segundo.

Por exemplo, a serie

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{2.3\ldots n} + \ldots$$

é convergente, qualquer que seja o valor que se dê a x, pois que a razão dos valores absolutos de dous termos consecutivos

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{x}{n+1}$$

tende para 0 quando n augmenta indefinidamente.

IV. *Se, para todos os valores de n a partir de um numero determinado p, a raiz $\sqrt[n]{|u_n|}$ é menor do que uma quantidade L, inferior á unidade, a serie* (1) *é convergente; se esta raiz é maior do que a unidade, a serie é divergente.*

Temos, por hypothese,

$$|u_p| < L^p, \ |u_{p+1}| < L^{p+1}, \text{ etc.};$$

logo os termos da serie

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

são, a partir do termo de ordem p, menores do que os termos correspondentes da serie convergente

$$|u_1| + \ldots + |u_{p-1}| + L^p (1 + L + L^2 + \ldots).$$

Logo, aquella serie é convergente, assim como a serie (1).

Se temos $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$, é tambem $|u_n| > 1$, quando $n > p$, e portanto a serie (1) é divergente.

Do theorema que vimos de demonstrar, devido a Cauchy (l. c.), deduz-se um corollario analogo ao que se deduziu do theorema anterior.

Por exemplo, a serie

$$\frac{1}{(\log 2)^2} + \frac{1}{(\log 3)^3} + \ldots + \frac{1}{(\log n)^n} + \ldots$$

é convergente, visto que é

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} = 0.$$

V. *Se existir um numero a, maior do que a unidade, tal que, para todos os valores de n, a partir de um numero determinado p, o producto* $n^a |u_n|$ *seja menor do que uma quantidade fixa K, a serie é convergente* (Cauchy, l. c.).

Com effeito, por ser

$$|u_p| < \frac{K}{p^a}, \ |u_{p+1}| < \frac{K}{(p+1)^a}, \text{ etc.},$$

os termos da serie

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

a partir do termo de ordem p, são menores do que os termos correspondentes da serie convergente (n.º 20).

$$|u_1| + \ldots + |u_{p-1}| + K \left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \ldots \right).$$

Logo aquella serie é convergente, e portanto é tambem convergente (th. II) a serie (1).

Se existir um numero a, igual ou inferior á unidade, tal que, para todos os valores de n,

a partir de um numero determinado p, os termos da serie (1) *sejam positivos e o producto $n^a u_n$ seja maior do que um numero fixo* K, *a serie* (1) *é divergente.*

Com effeito, temos

$$u_p > \frac{K}{p^a},\quad u_{p+1} > \frac{K}{(p+1)^a},\ \text{etc.},$$

e portanto, a partir da ordem p, os termos da serie (1) são maiores do que os termos correspondentes da serie divergente

$$u_1 + \ldots + u_{p-1} + K\left(\frac{1}{p^a} + \frac{1}{(p+1)^a} + \ldots\right).$$

Logo a serie (1) é divergente.

Assim, por exemplo, a serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

é divergente, por ser

$$nu_n = \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} > \frac{1}{2}.$$

VI. *Seja* L *uma quantidade positiva e*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

um grupo composto de um numero infinito de numeros positivos. Se a desegualdade

$$a_n \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - a_{n+1} > L$$

for satisfeita pelos valores de n superiores a um numero p, a serie é convergente.

Temos, por hypothese,

$$|u_{p+1}| < \frac{1}{L}\left[a_p |u_p| - a_{p+1} |u_{p+1}|\right],$$

$$|u_{p+2}| < \frac{1}{L}\left[a_{p+1} |u_{p+1}| - a_{p+2} |u_{p+2}|\right],$$

. . . .,

F

e portanto

$$|u_{p+1}|+\ldots+|u_{p+m}|<\frac{1}{L}[a_p|u_p|-a_{p+m}|u_{p+m}|]<\frac{a_p|u_p|}{L},$$

por maior que seja m. Logo

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|<|u_1|+\ldots+|u_p|+\frac{a_p|u_p|}{L}.$$

Quando n tende para ∞, o primeiro membro desta desegualdade augmenta sempre, sem todavia poder exceder o valor determinado do segundo membro, e portanto tende para um limite. Logo a serie

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

é convergente, assim como (n.º 22–II) a serie (1).

D'este theorema, devido a Kummer (1), tira-se como corollario, pondo $a_n = n$, o theorema seguinte, devido a Raabe (2):

Se a desegualdade

$$n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)>1+L$$

for satisfeita por todos os valores de n superiores a um numero p, a serie (1) *é convergente.*

VII. *Sejam u_1, u_2, etc. quantidades positivas e*

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots$$

uma serie cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Se u_n decresce constantemente e tende para zero, quando n cresce indefinidamente, esta serie é convergente.

Com effeito, por ser cada termo da serie considerada maior do que o seguinte, a differença

$$s_{n+p}-s_n=\pm[u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\ldots]$$

tem o signal do primeiro termo. Mas esta differença póde ser escripta do modo seguinte:

$$\pm[u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-(u_{n+4}-u_{n+5})-\ldots],$$

e vê-se então que o seu valor absoluto é menor do que u_{n+1}, pois que esta expressão deve

(1) *Jornal de Crelle*, t. XIII, 1835.
(2) *Zeitschrift fur Mathematik*, t. x, 1832.

ter o signal do primeiro termo. Temos pois

$$(A) \qquad s_{n+p} - s_n < u_{n+1}.$$

Por outra parte, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde, por hypothese, um numero n_1 tal que é $u_{n+1} < \delta$, quando $n > n_1$.

Logo a desegualdade

$$s_{n+p} - s_n < \delta$$

é satisfeita pelos valores de n superiores a n_1, e a serie considerada é portanto (21–2.º) convergente.

Por exemplo, a serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

é convergente.

Nota. — Fazendo na formula (A) tender p para o infinito e notando que s_{n+p} tende para a somma s da serie considerada, é facil de ver que o erro que se commette, quando se toma para valor approximado de s a somma dos n primeiros termos da serie, é menor do que o primeiro termo desprezado [1].

23. *Series de termos imaginarios.* — Consideremos agora as series compostas de termos imaginarios:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \dots + (x_n + iy_n) + \dots$$

ou

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Se as series

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

são convergentes, a serie (4) diz-se *convergente*. Neste caso a somma s_n dos seus n primeiros termos, isto é a somma

$$s_n = \sum_{1}^{n} (x_n + iy_n) = \sum_{1}^{n} x_n + i \sum_{1}^{n} y_n,$$

tende para um limite determinado, que se chama *somma da serie* (4).

[1] Outros criterios para reconhecer a convergencia das series foram dados por Gauss (*Werke*, t. III, pag. 139), Morgan (*Dif. Cal.*, London, 1836), Bertrand (*Journal de Liouville*, t. VII, pag. 37), etc.

A respeito de convergencia das series de termos imaginarios vamos demonstrar os theoremas seguintes:

Theorema 1.º — *É condição necessaria e sufficiente para que a serie (4) seja convergente, que a cada valor dado á quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero n_1, tal que a desegualdade*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{n+1}^{n+p} x_m + i \sum_{n+1}^{n+p} y_m \right| < \delta$$

seja satisfeita pelos valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p.

Esta proposição é uma consequencia immediata do theorema II do n.º 19.

Theorema 2.º — *Para que a serie (4) seja convergente, basta que a serie formada pelos módulos dos seus termos o seja.*

Com effeito, das desegualdades

$$|x_m| < \sqrt{x^2_m + y^2_m}, \quad |y_m| < \sqrt{x^2_m + y^2_m}$$

deduz-se (n.º 22-I) que, quando a serie

$$(6) \qquad \sum_1^{\infty} \sqrt{x^2_m + y^2_m}$$

é convergente, tambem são convergentes as series

$$(7) \qquad \sum_1^{\infty} |x_m|, \quad \sum_1^{\infty} |y_m|.$$

Logo as series (5) são (n.º 22-II) convergentes, assim como a serie (4).

O theorema reciproco do precedente não é sempre verdadeiro, isto é, póde ser convergente a serie (4) e não o ser a serie correspondente dos módulos. Ha porém um caso importante em que esta proposição reciproca é verdadeira, que é quando as series (7) são convergentes. Com effeito, temos

$$\sqrt{x^2_m + y^2_m} < |x_m| + |y_m|,$$

e portanto

$$\sum_1^{n} \sqrt{x^2_m + y^2_m} < \sum_1^{n} |x_m| + \sum_1^{n} |y_m|.$$

Quando n augmenta indefinidamente, o segundo membro desta desegualdade tende, por hypothese, para um limite, e o primeiro membro augmenta constantemente, sem poder exceder este limite. Logo tende tambem para um limite, e a serie (6) é portanto convergente.

24. *Series absolutamente convergentes.* — As series formadas de termos cujos modulos formam uma serie convergente, chamam-se *series absolutamente convergentes*. A respeito d'estas series vamos demonstrar o seguinte theorema importante, devido a Dirichlet.

THEOREMA 3.º — *A somma de uma serie absolutamente convergente não se altera quando se muda a ordem dos seus termos.*

Seja s_n a somma dos n primeiros termos da serie dada, s a somma desta serie e s'_p a somma dos p primeiros termos da nova serie, que resulta de mudar a ordem dos termos da primeira. Suppondo que se dá a p um valor sufficientemente grande para que s'_p contenha todos os termos de s_n, e chamando u_α, u_β, etc. os termos que aquella somma contém a mais, vem

$$s'_p = s_n + u_\alpha + u_\beta + \ldots + u_\gamma;$$

e portanto, attendendo ao theorema 1.º do n.º 11,

$$|s'_p - s| \overline{\overline{<}} |s_n - s| + |u_\alpha| + |u_\beta| + \ldots + |u_\gamma|$$

$$\overline{\overline{<}} |s_n - s| + |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_p|.$$

Por ser convergente a serie $\sum_1^\infty |u_m|$, o segundo membro desta desegualdade tende para zero quando n tende para o infinito; logo s'_p tende para o limite s, quando p tende para o infinito.

No que precede suppozemos que cada termo occupa, depois de feita a mudança da ordem dos termos da serie, um logar tal que a differença entre os numeros que indicam a sua ordem antes e depois da mudança seja finita. Supponhamos agora que se agrupam separadamente os termos da serie, em numero infinito, que satisfazem a determinadas condições, e sejam $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$, ... as sommas das novas series assim formadas. Dando a p um valor sufficientemente grande para que $s^{(1)} + s^{(2)} + \ldots + s^{(p)}$ contenha todos os termos de s_n, temos, como no caso anterior, a desegualdade

$$|s^{(1)} + s^{(2)} + \ldots + s^{(p)} - s| \overline{\overline{<}} |s_n - s| + |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots,$$

a qual faz vêr que a somma $s^{(1)} + s^{(2)} + \ldots + s^{(p)}$ tende para o limite s, quando p tende para o infinito.

Corollario. — *Em qualquer serie formada de termos reaes póde alterar-se a ordem das parcellas, sem mudar o valor da serie, se, dando a todos os termos da serie o signal* $+$, *resultar uma serie convergente.*

Nota. — A respeito do theorema que precede faremos a seguinte observação:

Se a serie proposta não for absolutamente convergente, não se póde mudar a ordem dos seus termos, porque d'esta mudança podem provir ou novas series convergentes com valores differentes da primeira ou series divergentes. É o que se vê no exemplo ([1]):

$$U = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \dots$$

Com effeito, dando outra disposição aos termos d'esta serie, vem, representando por n um numero impar,

$$\left(2 - \frac{2}{2}\right) - \frac{2}{4} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{6}\right) - \frac{2}{8} + \dots + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{2n}\right) - \frac{2}{2n+2} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}\,U.$$

Accrescentaremos ao que precede que as series que não são absolutamente convergentes são chamadas por alguns auctores *semi-convergentes;* que se póde dar, como mostrou Riemann ([2]), aos termos de qualquer serie semi-convergente uma ordem tal que a somma da nova serie tome um valor arbitrariamente dado; e finalmente que é sempre possivel, segundo notou Ed. Weyr ([3]), reunir os termos d'aquella serie em grupos que formem uma serie absolutamente convergente.

25. *Operações sobre series.* — Passando agora ás operações sobre series, demonstraremos a este respeito os dous theoremas seguintes, devidos a Cauchy (l. c.):

Theorema 4.° — *Se as series*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

forem convergentes e se as suas sommas forem s *e* s', *tambem a serie cujo termo geral é* $u_n + v_n$ *será convergente, e a sua somma será egual a* $s + s'$.

([1]) Longchamps: *Algèbre* (Paris, 1889), pag. 166.

([2]) Riemann: *Oeuvres complètes* (Paris, pag. 234).

([3]) Ed. Weyr: *Deux remarques relatives aux séries* (*Jornal de Sciencias Mathematicas*, t. VIII).

Com effeito, a somma dos n primeiros termos da nova serie é

$$\sum_1^n u_n + \sum_1^n v_n,$$

e esta somma tende para o limite $s + s'$.

Theorema 5.º — *Se as series precedentes forem absolutamente convergentes, a serie*

$$(A)\quad \begin{cases} u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \ldots \\ + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1) + \ldots \end{cases}$$

é convergente e a sua somma é egual ao producto ss' das sommas das series consideradas [1].

Como as series propostas são, por hypothese, absolutamente convergentes, as series

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots,\ |v_1| + |v_2| + |v_3| + \ldots$$

são convergentes. Sejam pois S e S' as suas sommas e σ_n a somma dos n primeiros termos da serie

$$|u_1||v_1| + (|u_1||v_2| + |u_2||v_1|) + \ldots$$
$$+ (|u_1||v_n| + |u_2||v_{n-1}| + \ldots + |u_n||v_1|) + \ldots$$

Teremos a desegualdade

$$\begin{aligned} \sigma_n = & |u_1| [|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|] \\ & + |u_2| [|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_{n-1}|] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & < |u_1| S' + |u_2| S' + \ldots + |u_n| S' < SS', \end{aligned}$$

a qual mostra que σ_n tende para um limite (n.º 14-1.º), quando n tende para o infinito, e portanto que a serie anterior é convergente.

Vê-se pois que a serie (A) é *absolutamente* convergente. Para achar a sua somma, basta dispor os seus termos do modo seguinte (n.º 24):

$$u_1 (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots) + u_2 (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots) + \ldots,$$

---

[1] Veja-se no tomo CXXIX, pag. 182, do *Jornal de Crelle*, uma extensão d'este theorema, devida a Mertens.

para concluir que esta somma é egual ao producto

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)(v_1 + v_2 + v_3 + \dots),$$

cujo valor é ss'.

26. *Series cujos termos dependem de uma variavel.* — Consideremos ainda a serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m$$

e supponhamos que os seus valores dependem de uma variavel z, egual a $x + iy$, que toma um numero infinito de valores, z', z'', z''', etc.

Se esta serie é convergente nos pontos z', z'', etc., a cada valor da quantidade positiva δ e a cada valor de z corresponde um numero n_1, tal que é (n.º 23–1.º)

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p.

Se a todos os valores de z considerados corresponde o mesmo valor de n_1, diz-se que a serie é *uniformemente convergente nos pontos* z', z'', etc.

Se os valores de z considerados são representados geometricamente pelos pontos de uma linha ou de uma área dada, diz-se que a serie é *uniformemente convergente na linha* ou *na área dada.* Se é $y = 0$ e os valores z', z'', etc. representam todos os valores de z desde um numero A até um numero B, diz-se que a serie é *uniformemente convergente no intervallo de* A *a* B.

Chamando s a somma da serie considerada, s_n a somma dos n primeiros termos e R_n a somma dos restantes, e fazendo tender na desegualdade precedente p para o infinito, temos, quando a serie é uniformemente convergente,

$$|s - s_n| = |R_n| \overline{\overline{<}} \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja z.

Reciprocamente, *se a serie proposta for convergente e a cada valor de δ corresponder um numero n_1 tal que seja $|R_n| < \delta$, quando $n > n_1$, qualquer que seja z, a serie é uniformemente convergente.* Com effeito, das desegualdades

$$|R_n| = |s - s_n| < \delta, \quad |R_{n+p}| = |s - s_{n+p}| < \delta,$$

que têem logar, por hypothese, quando $n > n_1$, tira-se a desegualdade

$$|s_{n+p} - s_n| = |s_{n+p} - s - s_n + s| < 2\delta,$$

que tem logar tambem quando $n > n_1$, qualquer que seja z, e que mostra portanto que a serie é uniformemente convergente.

I. Theorema 6.º — *Se os módulos (ou os valores absolutos) dos termos da serie proposta forem, qualquer que seja z, inferiores aos termos correspondentes de uma serie convergente, composta de termos positivos constantes, a serie proposta é uniformemente convergente.*

Com effeito, sendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ os termos d'esta ultima serie, temos, para todos os valores de z considerados,

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \ldots + \varepsilon_{n+p}.$$

Mas, por hypothese, a cada valor de δ corresponde um numero n_1, tal que é

$$\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \ldots + \varepsilon_{n+p} < \delta,$$

quando $n > n_1$.

Logo é tambem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja z, e a serie Σu_m é portanto uniformemente convergente.

II. Para se vêr um exemplo de uma serie que, sendo convergente, não é todavia uniformemente convergente, consideremos a expressão

$$(1-x)x + (1-x)x^2 + \ldots + (1-x)x^m + \ldots,$$

onde suppomos que x é real e que varia desde 0 até 1. Neste intervallo esta serie é convergente, mas não é uniformemente convergente, porque a desegualdade

$$|R_n| = (1-x)x^{n+1} + (1-x)x^{n+2} + \ldots = x^{n+1} < \delta$$

dá $x < \delta^{\frac{1}{n+1}} < 1$, quando $\delta < 1$; e portanto vê-se que não existe valor algum finito de n tal que aquella desegualdade seja satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre 0 e 1.

27. Consideremos agora as series ordenadas segundo as potencias de uma variavel, isto é as series da fórma

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m z_m, \quad z = x + iy, \tag{8}$$

e demonstremos os seguintes theoremas, devidos a Abel:

Theorema 7.º — *Se existir um numero positivo a, que, substituido em (8) no logar do mó-*

dulo de z, torne os módulos de todos os termos da serie inferiores a uma quantidade finita B, *a serie* (8) *é absolutamente convergente, quando* $|z| < a$.

Seja z_1 um valor de z de módulo menor do que a. Por ser, por hypothese, $|c_m| a^m < B$, temos

$$|c_m| |z_1|^m < B \left|\frac{z_1}{a}\right|^m;$$

e portanto os termos da serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m| |z_1|^m$$

são menores do que os termos correspondentes da progressão

$$\sum_{m=1}^{\infty} B \left|\frac{z_1}{a}\right|^m.$$

Logo aquella serie é (n.º 22-I e II) absolutamente convergente.

Nota. — O theorema que vimos de considerar mostra que todos os valores de $|z|$ podem ser divididos em dois grupos, separados por um numero R, o primeiro compostos dos valores de $|z|$ para os quaes a serie (8) é convergente, e o segundo composto dos valores de $|z|$ para os quaes esta serie é divergente. Os numeros do primeiro grupo são menores do que R e os numeros do segundo grupo são maiores do que R. Como os valores de z, cujo módulo é menor do que R, são representados (n.º 12) pelos pontos do interior de um circulo de raio R com o centro na origem das coordenadas, vê-se que a serie (8) é convergente quando z representa um ponto interior a este circulo, e divergente quando z representa um ponto exterior. A este circulo, cuja consideração é devida a Cauchy, chama-se *circulo de convergencia* da serie (8).

O theorema precedente nada diz relativamente á convergencia ou divergencia da serie (8), quando z representa pontos collocados sobre a circumferencia do circulo de convergencia.

Deve-se observar que a serie (8) póde ser convergente sómente no ponto $z = 0$, e n'este caso o raio do circulo de convergencia é nullo; e que póde ser convergente qualquer que seja o valor que se dê a z, e n'este caso diz-se que o raio do circulo de convergencia é infinito.

O estudo das series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - a$, isto é o estudo das series da fórma

$$\sum_{1}^{\infty} c_m (z - a)^m,$$

reduz-se, pondo $z - a = t$, ao da serie que vimos de considerar. Neste caso existe ainda um circulo de convergencia, cujo centro é o ponto que representa a.

Theorema 8.º — *Toda a serie ordenada segundo as potencias de uma variavel z, que é convergente quando* $|z| < R$, *é uniformemente convergente para todos os valores de z que satisfazem á condição* $|z| \leqq \rho$, *sendo* $\rho < R$.

Seja

$$\sum_{1}^{\infty} c_m z^m, \quad z = x + iy$$

a serie proposta.

Por ser esta serie absolutamente convergente quando $|z| < R$, a serie $\sum |c_m| \rho^m$ é convergente. Temos porém, por hypothese, $|c_m| |z|^m < |c_m| \rho^m$. Logo a serie considerada é, em virtude do theorema 6.º, uniformemente convergente quando $|z| \leqq \rho$.

Por exemplo, a serie

$$1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

é convergente, qualquer que seja z, visto que a serie

$$1 + |z| + \frac{|z|^2}{1.2} + \ldots + \frac{|z|^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

é sempre convergente. Logo o raio do circulo de convergencia d'aquella serie é infinito, e a serie é absoluta e uniformemente convergente em uma área qualquer.

Como segundo exemplo consideremos a serie

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n + \ldots$$

e supponhamos que α, β, γ são constantes.

A serie correspondente dos módulos é

$$1 + \left|\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}\right| |z| + \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}\right| |z|^2 + \ldots$$

$$+ \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\right| |z|^n + \ldots$$

e a razão de dois termos consecutivos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}\right| |z| = \left|\frac{\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\frac{\beta-1}{n}\right)}{1+\frac{\gamma-1}{n}}\right| |z|$$

tende para $|z|$, quando n augmenta indefinidamente. Logo esta serie é convergente (n.º 22-III) quando $|z| < 1$, e divergente quando $|z| > 1$.

Logo o raio do circulo de convergencia da serie considerada é egual á unidade, e a serie é absoluta e uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro d'este circulo.

A serie precedente, que tem sido objecto de trabalhos importantes, tem o nome de serie *hypergeometrica*.

Nota. É conveniente observar que, como corollario dos theoremas 7.º e 8.º, se conclue, pondo $y=0$, que os valores de x para os quaes a serie de termos reaes $\Sigma c_m x^m$ é convergente, estão comprehendidos entre dois numeros eguaes e de signal contrario, $-\mathrm{R}$ e R, e que esta serie é absoluta e uniformemente convergente em qualquer intervallo $(-\rho, \rho)$, tal que seja $\rho < \mathrm{R}$.

28. *Series duplas.* — Dá-se o nome de series duplas ás sommas $\Sigma u_n^{(m)}$ cujos termos se formam dando em $u_n^{(m)}$ a m e n uma infinidade de valores inteiros, positivos ou negativos.

Se dispozermos estes termos uns adiante dos outros, segundo uma ordem tal que não dê logar a omissão alguma, obtem-se uma serie simples. Se esta serie fôr absolutamente convergente, a serie dupla diz-se tambem *absolutamente convergente*. Neste caso podemos mudar a ordem dos termos da serie simples (n.º 24), sem alterar a sua somma; e, como cada mudança no modo de disposição dos termos da serie dupla, para formar nova serie simples, corresponde a uma mudança no modo de disposição dos termos da serie dupla primeiramente formada, vê-se que todas as series simples, a que dá origem a serie dupla, têem a mesma somma. Esta somma é, por definição, a *somma* da serie dupla considerada.

Para ter o exemplo de uma distribuição dos termos da serie dupla, para formar uma serie simples, basta, quando n e m são positivos, ordenar os termos da serie dupla segundo a ordem crescente das sommas $m+n$ e, em cada grupo assim formado, segundo a ordem crescente de m; o que dá

$$u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_0^{(1)} + u_2^{(0)} + u_1^{(1)} + u_0^{(2)} + \ldots$$

Como esta serie é, por hypothese, absolutamente convergente, podemos dispôr os seus termos do modo seguinte (n.º 24):

$$\begin{array}{l} u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + u_2^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \ldots \\ + u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ou do modo seguinte:

$$\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + u_0^{(2)} + \dots \\ + u_1^{(0)} + u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \dots \\ + u_2^{(0)} + u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Representando por $s^{(0)}$, $s^{(1)}, \dots$ as sommas das series que formam as linhas do primeiro quadro, por s_0, s_1, s_2, ... as sommas das series que formam as linhas do segundo quadro, e por S a somma da serie dupla, temos

$$S = s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \dots$$

e

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$$

Para considerar o caso de m e n representarem numeros inteiros, positivos e negativos, basta applicar o que precede á serie dupla

$$\Sigma\,(u_n^{(m)} + u_{-n}^{(m)} + u_n^{(-m)} + u_{-n}^{(-m)}),$$

onde n e m são positivos.

Terminaremos o que temos a dizer sobre as series duplas pelo seguinte theorema, de que se faz muitas vezes uso[1]:

Se as series

$$\begin{array}{l} \sigma_0 = |u_0^{(0)}| + |u_1^{(0)}| + |u_2^{(0)}| + \dots, \\ \sigma_1 = |u_0^{(1)}| + |u_1^{(1)}| + |u_2^{(1)}| + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

forem convergentes, assim como a serie

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots,$$

a serie dupla $\Sigma\, u_n^{(m)}$ *é absolutamente convergente.*

Com effeito, dispondo os termos da serie $\Sigma\,|u_n^{(m)}|$ de modo a formar uma serie simples, a somma dos t primeiros termos d'esta serie cresce constantemente com t, sem poder exceder a somma da serie $\Sigma\,\sigma_n$. Logo aquella somma tende para um limite, quando t tende para o infinito, e a serie simples assim formada é absolutamente convergente; a serie $\Sigma\, u_n^{(m)}$ é portanto tambem absolutamente convergente.

---

(1) Cauchy: *Cours d'Analyse;* Nota 7.ª

VI

Productos infinitos

29. Consideremos agora as expressões da fórma

$$(1) \qquad (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_m)\dots,$$

em que o numero de factores é infinito, que, empregando o signal Π para representar productos, podemos escrever do modo seguinte:

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+a_m).$$

A cada expressão da fórma precedente chama-se um *producto infinito;* e diz-se que este producto é convergente, se o producto

$$\prod_{m=1}^{n}(1+a_m)$$

dos n primeiros factores tende para um limite determinado, quando n tende para o infinito. Este limite é o valor do producto infinito (1).

I. Antes de procurar as condições de convergencia do producto (1), vamos demonstrar o seguinte lemma, de que teremos de fazer uso:

A média geometrica dos numeros A, B, C, *etc. é sempre menor do que a média arithmetica dos mesmos numeros.*

Esta proposição é devida a Cauchy e foi demonstrada por este eminente geometra do modo que vamos expôr (2).

---

(1) Os productos infinitos foram considerados pela primeira vez por Wallis, que os empregou na sua *Arithmetica infinitorum* para o calculo da área do circulo, e depois por Euler, na sua admiravel *Introductio in Analysin infinitorum,* publicada em 1748, o qual exprimiu por este algorithmo o seno, o coseno, etc. Foram em seguida usados por Jacobi, Heine, Weierstrass, etc., como se verá em diversos logares d'esta obra. As condições para se empregarem no calculo foram estudadas por Kummer (*Jornal de Crelle*, t. XIII), Cauchy (*Cours d'Analyse,* Nota 9.ª), Weierstrass (*Jornal de Crelle*, LI), etc.

(2) Cauchy: *Cours d'Analyse,* Nota 2.ª

Seja n o numero das lettras A, B, C, etc. Queremos provar que é sempre

$$\sqrt[n]{ABC\ldots} < \frac{A+B+C\ldots}{n},$$

ou que é

$$ABC\ldots < \left(\frac{A+B+C\ldots}{n}\right)^n.$$

Ora, em primeiro logar, temos evidentemente, quando é $n=2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

d'onde se conclue, pondo successivamente $n=4$, $n=8$, ..., $n=2^m$,

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4$$

$$< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

....

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}.$$

Em segundo logar, se n não é um termo da progressão geometrica 2, 4, 8, 16, etc., designe-se por 2^m um termo d'esta progressão, superior a n, ponha-se

$$K = \frac{A+B+C+\ldots}{n}$$

e egualem-se a K as $2^m - n$ ultimas quantidades que entram nos dois membros d'esta desegualdade. Teremos

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, substituindo K pelo seu valor,

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+\ldots}{n}\right)^n,$$

que é o que se queria demonstrar.

II. Posto isto, vamos procurar as condições de convergencia do producto (1), suppondo primeiramente que as quantidades a_1, a_2, a_3, etc. são reaes e positivas.

Vimos de vêr que a média arithmetica de p quantidades positivas é maior do que a sua média geometrica; portanto, sendo q d'estas quantidades eguaes a A e as restantes eguaes a B, temos

$$\left(\frac{q\mathrm{A}+(p-q)\mathrm{B}}{p}\right)^p > \mathrm{A}^q\,\mathrm{B}^{p-q}.$$

Pondo n'esta desegualdade

$$\mathrm{A}=1+\beta\frac{p}{q},\quad \mathrm{B}=1,$$

vem

$$(1+\beta)^p > \left(1+\beta\frac{p}{q}\right)^q,$$

ou, pondo $\beta=1$,

$$2^p > \left(1+\frac{p}{q}\right)^q.$$

Temos pois, pondo $\gamma=\frac{p}{q}>1$,

$$2^\gamma > 1+\gamma > 1+\frac{1}{2}\gamma.$$

Se fôr $0<\gamma<1$, a fórmula precedente dá, mudando γ em $1+\gamma$,

$$2^{1+\gamma} > 1+(1+\gamma),$$

e portanto temos tambem n'este caso

$$2^\gamma > 1+\frac{1}{2}\gamma.$$

Em virtude d'esta deségualdade virá, pondo $\gamma=2a_m$,

$$\text{(A)}\qquad 1+a_m < 2^{2a_m}$$

e portanto

$$\prod_{m=1}^{n}(1+a_m) < \prod_{1}^{n} 2^{2a_m} = 2^{2s_n},\quad s_n=\sum_{1}^{n} a_m.$$

Se a serie Σa_m é convergente, a sua somma é inferior a um numero racional α, e temos

$$\prod_{m=1}^{n} (1+a_m) < 2^{2\alpha};$$

portanto $\prod_{1}^{n} (1+a_m)$ tende para um limite determinado, quando n augmenta (n.º 14-1.º) indefinidamente.

A demonstração que precede só tem logar quando todas as quantidades a_1, a_2, etc. são racionaes. A conclusão porém, a que se chegou, tem ainda logar quando todas ou algumas d'estas quantidades são irracionaes. Com effeito, representando por b_1, b_2, etc. numeros racionaes respectivamente inferiores a a_1, a_2, etc. e tão proximos d'estes numeros quanto se queira, temos

$$\sum_{m=1}^{n} b_m < \sum_{m=1}^{\infty} a_m < \alpha,$$

e portanto

$$\prod_{m=1}^{n} (1+b_m) < 2^{2\sum_{1}^{n} b_m} < 2^{2\alpha}.$$

Quando b_1, b_2, etc. tendem para a_1, a_2, etc., e n augmenta indefinidamente, o primeiro membro d'esta desegualdade augmenta constantemente; logo tende (n.º 14-1.º) para um limite.

Reciprocamente, a desegualdade

$$\prod_{m=1}^{n} (1+a_m) = 1 + \sum_{m=1}^{n} a_m + \dots > \sum_{m=1}^{n} a_m$$

mostra que, se $\sum_{1}^{n} a_m$ tende para ∞, quando n augmenta indefinidamente, tambem o producto $\prod_{1}^{n} (1+a_m)$ tende para ∞.

Temos pois o seguinte:

Theorema. *E condição necessaria e sufficiente para que o producto* (1) *seja convergente que a serie Σa_m o seja.*

30. Podemos ligar com a doutrina precedente a das potencias de grau infinito. A este respeito vamos considerar a expressão

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

que tem grande importancia no *Calculo Differencial*, para procurar o limite para que tende, quando n tende para o infinito. Supporemos que o numero n é inteiro e positivo, reservando para mais tarde o caso de n representar um numero qualquer.

A desegualdade

$$(1+\beta)^p > \left(1+\beta\frac{p}{q}\right)^q$$

ou

$$(1+\beta)^\gamma > 1+\beta\gamma$$

dá, pondo $\beta = \frac{1}{n+1}$, $\gamma = \frac{n+1}{n}$ e elevando á potencia n os seus dois membros,

$$\text{(B)} \qquad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Logo a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ augmenta indefinidamente com n.

Por outra parte, temos, pondo $a_m = \frac{1}{n}$ na desegualdade (A),

$$1+\frac{1}{n} < 2^{\frac{2}{n}},$$

e portanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

A desegualdade (B) mostra que a expressão considerada augmenta indefinidamente com n, e esta ultima desegualdade mostra que não póde exceder o numero 4; logo tende para um limite determinado, quando n tende para o infinito. Este limite, que se designa habitualmente pela lettra e, tem uma grande importancia na theoria dos logarithmos, como adiante se verá.

31. Consideremos agora o producto

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+u_m),$$

onde u_1, u_2, etc. representam quantidades reaes ou imaginarias.

O theorema demonstrado na *Algebra elementar*, relativo á multiplicação de binomios, dá

$$\prod_{m=1}^{n}(1+u_m) = 1+\sum_1^n u_m + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n,$$

e do mesmo modo

$$\prod_{m=1}^{n} (1+a_m) = 1 + \sum_1^n a_m + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n,$$

chamando a_1, a_2, etc. os módulos de u_1, u_2, etc.

Suppondo agora que o producto $\prod_1^\infty (1+a_m)$ é convergente, a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero n_1, tal que (n.º 14)

$$\prod_{m=1}^{n+p} (1+a_m) - \prod_{m=1}^{n} (1+a_m) = \Sigma' a_j a_k \ldots < \delta,$$

quando $n > n_1$, qualquer que seja p.

Mas temos

$$\prod_{m=1}^{n+p} (1+u_m) - \prod_{m=1}^{n} (1+u_m) = \Sigma' u_j u_k \ldots$$

e (n.º 11–I)

$$|\Sigma' u_j u_k \ldots| \overline{\overline{<}} \Sigma' a_j a_k \ldots$$

Logo

$$\left| \prod_{m=1}^{n+p} (1+u_m) - \prod_{m=1}^{n} (1+u_m) \right| < \delta,$$

quando $n > n_1$, e o producto $\prod_1^\infty (1+u_m)$ é portanto (n.º 19–II) convergente.

Podemos pois enunciar o principio seguinte:

Se o producto $\prod_1^\infty (1+a_m)$ é convergente, tambem é convergente o producto $\prod_1^\infty (1+u_m)$.

Por exemplo, o producto

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|}{1.2 \ldots m}\right),$$

onde $z = x + iy$, é convergente, visto ser convergente a serie (n.º 22–III)

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|}{1.2 \ldots m}.$$

Logo tambem é convergente o producto

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{1.2 \ldots m}\right).$$

*

I. No caso de ser convergente e producto $\Pi(1+a_m)$, o producto $\Pi(1+u_m)$ diz-se *absolutamente convergente*. N'este caso *póde mudar-se a ordem dos seus factores, sem alterar o seu valor*. Com effeito, representando por P_n o producto dos n primeiros factores do producto infinito dado, por P o valor d'este producto e por P'_s o producto dos s primeiros factores do producto infinito que resulta da mudança da ordem dos factores do primeiro, e dando a s um valor sufficientemente grande para que P'_s contenha todos os factores de P_n, temos

$$P'_s = P_n (1+u_\alpha)(1+u_\beta)\dots,$$

e portanto

$$|P'_s - P_n| = |P_n|\,|(1+u_\alpha)(1+u_\beta)\dots - 1| = |P_n|\,|\Sigma u_\alpha u_\beta \dots|,$$

$$\overline{\overline{<}}\, |P_n| \Sigma a_\alpha a_\beta \dots = |P_n| [(1+a_\alpha)(1+a_\beta)\dots - 1];$$

o que dá

$$|P'_s - P_n| \,\overline{\overline{<}}\, |P_n| [(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\dots - 1].$$

Mas, por ser convergente o producto $\prod_1^\infty (1+a_m)$, o producto infinito que entra no segundo membro d'esta egualdade tende para a unidade, quando n tende para o infinito. Logo P'_s tende para P, quando s tende para o infinito.

Se o producto infinito considerado se decompozer n'outros, cujos valores sejam $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ..., basta substituir no calculo anterior P'_s por $P^{(1)}+P^{(2)}+\dots+P^{(s)}$ para ver que esta ultima quantidade tende para P, quando s tende para o infinito.

II. Dá-se o nome de *productos infinitos duplos* aos productos da fórma

$$\Pi(1+u_n^{(m)}),$$

cujos factores se formam dando em $1+u_n^{m}$ a m e n uma infinidade de valores inteiros, positivos ou negativos.

Se dispozermos estes factores uns adiante dos outros segundo uma ordem tal que não dê logar a omissão alguma, obtem-se um producto infinito simples. Se este producto for absolutamente convergente, o producto infinito duplo diz-se *absolutamente convergente*. N'este caso o valor do producto infinito simples é sempre o mesmo, qualquer que seja a ordem pela qual se disponham os factores do producto duplo, para formar o producto simples, e é este valor que representa, por definição, o valor do producto duplo considerado.

VII

Fracções continuas

32. As fracções continuas numericas são conhecidas desde os *Elementos de Algebra*, onda se viu a grande importancia que têem em muitas questões relativas aos numeros. Os principaes resultados lá achados têem logar no caso em que, na fracção continua

$$(1)\qquad u = \frac{a_1}{b_1 + u_1}, \quad u_1 = \frac{a_2}{b_2 + u_2}, \quad u_2 = \frac{a_3}{b_3 + u_3}, \ldots,$$

a_1, a_2, etc., b_1, b_2, etc. representam polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de uma variavel x [1].

I. Formando as reduzidas successivas, como no caso das fracções continuas numericas, acham-se os resultados:

$$C_1 = \frac{N_1}{D_1} = \frac{a_1}{b_1},$$

$$C_2 = \frac{N_2}{D_2} = \frac{a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_2},$$

. . . .

$$C_n = \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1} b_n + N_{n-2} a_n}{D_{n-1} b_n + D_{n-2} a_n}, \ldots$$

Se o numero das quantidades u_1, u_2, etc. é infinito e C_n tende para um limite, quando n tende para infinito, a fracção continua diz-se *convergente*.

---

[1] Os primeiros resultados relativos á theoria das funcções continuas foram achados por Cataldi, Brounker, Wallis, Huygens, etc.; mas o principal fundador d'esta theoria foi Euler, que lhe consagrou diversas memorias, publicadas nos tomos IX e XI dos *Commentarii* e nos tomos IX e XI dos *Novi Commentarii* da Academia das Sciencias de S. Petersburgo, e um capitulo da sua *Introductio in Analysin infinitorum*. Depois occuparam-se das suas propriedades ou das suas applicações Lambert, Lagrange, Gauss, mais tarde Stern, que lhes consagrou um trabalho extenso, publicado nos tomos X e XI do *Jornal de Crelle*, e, nos ultimos tempos, Tchebicheff, Stieltjes, Padé, etc.

II. As tres reduzidas consecutivas:

$$\frac{N_{n-2}}{D_{n-2}}, \quad \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \quad \frac{N_n}{D_n} = \frac{N_{n-1}\, b_n + N_{n-2}\, a_n}{D_{n-1}\, b_n + D_{n-2}\, a_n}$$

dão, por subtracção,

$$C_{n-1} - C_n = \frac{a_n (N_{n-1}\, D_{n-2} - D_{n-1}\, N_{n-2})}{D_{n-1}\, D_n},$$

$$C_{n-2} - C_{n-1} = -\frac{N_{n-1}\, D_{n-2} - D_{n-1}\, N_{n-2}}{D_{n-1}\, D_{n-2}},$$

e portanto o numerador da differença $C_{n-1} - C_n$ é egual ao numerador da differença $C_{n-2} - C_{n-1}$, multiplicado por $-a_n$; mas as primeiras reduzidas dão

$$C_1 - C_2 = \frac{a_1\, a_2}{D_1\, D_2};$$

logo temos

$$C_{n-1} - C_n = (-1)^n \frac{a_1\, a_2 \ldots a_n}{D_{n-1}\, D_n},$$

e portanto

$$N_{n-1}\, D_n - N_n\, D_{n-1} = (-1)^n\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n.$$

III. Este resultado permitte transformar a fracção continua n'uma serie. Com effeito, temos evidentemente

$$u = C_1 - (C_1 - C_2) - (C_2 - C_3) - \ldots,$$

d'onde se segue

$$u = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1\, a_2}{D_1\, D_2} + \frac{a_1\, a_2\, a_3}{D_2\, D_3} - \ldots$$

O valor que se obtem sommando n termos d'esta serie é egual á reduzida de ordem n da fracção continua. Logo, para que a fracção continua seja convergente, é necessario e basta que esta serie o seja ([1]).

([1]) Póde ver-se outro criterio para reconhecer a convergencia das fracções continuas em um trabalho de Stern publicado no tomo XXXVII do *Jornal de Crelle*.

IV. Entre as fracções continuas contidas na fórma geral (1) ha um grupo mais importante na *Analyse*, o qual corresponde a $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$.

A respeito d'estas fracções continuas enunciaremos os principios seguintes:

1.º *A fracção algebrica* $\frac{N_n}{D_n}$ *é irreductivel.*

Este principio é consequencia da fórmula

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = (-1)^n.$$

2.º *O denominador da reduzida de ordem n é um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x, cujo grau é egual á somma dos graus de $b_1, b_2, \ldots, b_n$.*

Este principio é uma consequencia da lei de formação dos denominadores das reduzidas (n.º 32-I).

3.º *Se as quantidades $b_1, b_2, \ldots$ são todas positivas, D_n tende para ∞, quando n augmenta indefinidamente, e a serie precedentemente escripta é convergente, assim como a fracção continua considerada.*

4.º *Se u_n tende para um limite, quando x tende para o infinito, a differença entre o valor de u e o da reduzida C_{n-1} é da fórma*

$$u - C_{n-1} = \frac{1}{x^k}(A + \varepsilon), \tag{2}$$

onde k é a somma dos graus dos polynomios D_{n-1} e D_n, A uma constante determinada e ε uma quantidade que tende para zero, quando x tende para o infinito.

Antes de demonstrar esta proposição, demonstremos o lemma seguinte:

A fracção

$$y = \frac{Ax^a + Bx^b + \ldots}{Lx^l + Mx^m + \ldots},$$

cujo numerador e denominador estão ordenados segundo as potencias decrescentes de x, tende para zero, se é $a < l$, tende para $\frac{A}{L}$, se é $a = l$, e tende para o infinito, se é $a > l$, quando x tende para o infinito.

Com effeito, se é $a = l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \ldots}{L + Mx^{m-l} + \ldots} = \frac{A}{L};$$

se é $a > l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{A + Bx^{b-a} + \ldots}{Lx^{l-a} + Mx^{m-a} + \ldots} = \infty;$$

se é $a < l$, temos

$$\lim y = \lim \frac{Ax^{a-l} + Bx^{b-l} + \ldots}{L + Mx^{m-l} + \ldots} = 0.$$

Posto isto, a egualdade

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - \frac{N_n}{D_n} = (-1)^n \frac{1}{D_n D_{n-1}} = (-1)^n \frac{1}{D_{n-1} (D_{n-1} b_n + D_{n-2})}$$

dá, quando se muda b_n em $b_n + u_n$,

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u = (-1)^n \frac{1}{D_{n-1} (D_{n-1} b_n + D_{n-1} u_n + D_{n-2})} = (-1)^n \frac{1}{D_{n-1} (D_n + D_{n-1} u_n)}.$$

Temos pois a egualdade

$$(u - C_{n-1}) x^k = (-1)^{n+1} \frac{x^k}{D_{n-1} (D_n + D_{n-1} u_n)},$$

da qual se deduz, dividindo os dois termos da fracção que entra no segundo membro por x^k, fazendo tender x para o infinito e attendendo a que $\frac{D_{n-1} D_n}{x_k}$ tende para um limite determinado e $\frac{D^2_{n-1}}{x^k}$ tende para zero, uma egualdade da fórma

$$\lim x^k (u - C_{n-1}) = A,$$

da qual se tira o theorema enunciado.

5.º *Se* $\frac{N}{D}$ *representar uma fracção irreductivel, cujo numerador e denominador sejam polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de* x *e cujo denominador seja do grau* a, *e se existir um numero* m, *maior do que* $2a$, *tal que seja*

$$(3) \qquad u - \frac{N}{D} = \frac{1}{x^m} (B + \varepsilon'),$$

B sendo uma quantidade constante e ε' *uma quantidade que tenda para zero, quando* x *tende para o infinito, a fracção* $\frac{N}{D}$ *é egual á reduzida* C_{n-1} *da fracção continua* u, *no caso de* u_n *tender para um limite, quando* x *tende para o infinito.*

Sejam α_{n-1} e α_n os graus dos denominadores D_{n-1} e D_n de duas reduzidas consecutivas da fracção continua considerada, taes que $\alpha_{n-1} \overline{\overline{<}} \alpha$ e $\alpha_n > \alpha$, e ponha-se $\alpha + \alpha_{n-1} = s$.

As egualdades (2) e (3) dão

$$x^s\left(\frac{N}{D} - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}\right) = \frac{x^s}{x^k}(A + \varepsilon) - \frac{x^s}{x^m}(B + \varepsilon'),$$

e portanto, fazendo tender x para o infinito e notando que é $s < k$, $s \leqq 2\alpha < m$,

$$\lim \frac{x^s(ND_{n-1} - DN_{n-1})}{DD_{n-1}} = 0.$$

Temos pois

$$ND_{n-1} - DN_{n-1} = 0,$$

porque, se esta egualdade não tivesse logar, o grau do numerador da fracção precedente seria egual ou superior ao grau do denominador, e o limite da fracção não podia ser egual a zero, em virtude do lemma anteriormente demonstrado.

Logo

$$\frac{N}{D} = \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}},$$

que é o que se queria demonstrar.

33. A theoria das fracções continuas algebricas tem a sua principal applicação no problema que consiste em procurar, sendo dada a serie convergente

$$u = A_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots,$$

onde A_0 representa um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x, uma serie de fracções irreductiveis

$$\frac{N_1}{D_1}, \frac{N_2}{D_2}, \ldots, \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}, \ldots$$

taes que, sendo α o grau de D_{n-1}, seja

$$u - \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{1}{x^k}(A + \varepsilon),$$

representando por A uma constante, por k um numero inteiro maior do que 2α e por ε uma variavel que tende para zero, quando x tende para o infinito. Para resolver esta questão, vamos primeiramente desenvolver u em fracção continua.

Pondo, para isso,

$$u = A_0 + \frac{1}{v},\quad v = \frac{1}{\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots},$$

e suppondo que c_i é o primeiro dos coefficientes c_1, c_2, c_3, ... que não é nullo, teremos, effectuando a divisão, um resultado da fórma

$$v = A_1 + u_1,\quad u_1 = \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \frac{d_3}{x^3} + \dots,$$

onde A_1 representa um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x, do grau i.

Temos depois

$$u_1 = \frac{1}{v_1},\quad v_1 = \frac{1}{\frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \frac{d_3}{x^3} + \dots}$$

e portanto, suppondo que d_j é o primeiro dos coefficientes d_1, d_2, ... que não é nullo, e representando por A_2 um polynomio ordenado segundo as potencias inteiras e positivas de x, do grau j,

$$v_1 = A_2 + u_2,\quad u_2 = \frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{x^2} + \frac{e_3}{x^3} + \dots$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se o desenvolvimento de u em fracção continua:

$$u = A_0 + \frac{1}{A_1 + u_1},\quad u_1 = \frac{1}{A_2 + u_2},\ \dots,\ u_{n-1} = \frac{1}{A_n + u_n}.$$

Como u_n tende para zero, quando x tende para o infinito, e os graus de D_{n-1} e D_n são o primeiro egual a α e o segundo maior do que α, as convergentes d'esta fracção continua satisfazem (n.° 32-4.°) á questão proposta, e são as unicas fracções (n.° 32-5.°) que lhe satisfazem.

A transformação das series em fracções continuas foi feita pela primeira vez por Euler. A que vimos de considerar tem applicações importantes em um trabalho de Gauss sobre a quadratura approximada das curvas e em alguns trabalhos de Tchebicheff, Laguerre, Stieltjes, etc.

CAPITULO II

Principios geraes da theoria das funcções. Funcções algebricas, logarithmicas, etc.

I

Principios geraes

31. *Funcções de variaveis reaes.* — Se duas quantidades reaes variaveis x e y estão ligadas de tal modo que os valores da segunda dependem dos valores da primeira, diz-se que y é *funcção de* x. Assim, por exemplo, a^x, sen x, x^m, etc. são funcções de x. Para designar que y é funcção de x, emprega-se qualquer das notações

$$y = f(x),\ y = \mathrm{F}(x),\ y = \varphi(x),\ \text{etc.}$$

Os valores que tomam as funcções $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$, etc., quando á variavel x se dá o valor determinado a, representam-se por $f(a)$, $\mathrm{F}(a)$, etc.

Á variavel x chama-se *variavel independente* e á variavel y *variavel dependente.* A variavel independente póde representar qualquer numero de collecção geral dos numeros, ou qualquer numero de uma collecção especial, como, por exemplo, da collecção dos numeros comprehendidos entre A e B, etc. Os valores de y ficam determinados quando x é dado.

Uma funcção $f(x)$ diz-se *definida no intervallo de* $x = a$ a $x = b$, quando a todo o valor que se dá a x, desde a até b, corresponde um valor unico da funcção.

Uma funcção diz-se *definida na visinhança do ponto* $x = a$, quando existe um numero β, tal que a funcção é definida no intervallo de $x = a - \beta$ a $x = a + \beta$.

Nas definições e enunciados dos theoremas geraes, relativos ás funcções, supporemos sempre que a cada valor de x corresponde um só valor da funcção. Para depois se applicarem estes principios ás funcções que tomam muitos valores para cada valor de x, é necessario primeira-

*

mente separar aquelles valores de modo a formar novas funcções, taes que a cada valor de x corresponda um só valor de cada uma. As novas funcções assim formadas chamam-se *ramos* da primeira.

Deve-se observar que esta separação não se faz de uma maneira arbitraria; deve ser feita de tal modo que as novas funcções tenham as qualidades geraes que iremos attribuindo ás funcções de que nos occuparmos.

35. Principiaremos o estudo geral das funcções demonstrando o theorema seguinte, devido a Weierstrass:

Se os valores da funcção $f(x)$, correspondentes aos valores que toma x desde $x=\alpha$ até $x=\beta$, estão todos comprehendidos entre dois numeros a e b, existe sempre um numero L, *tal que os valores de $f(x)$ não podem ser superiores a* L *e tal que, ou* L *representa um valor de $f(x)$, ou entre* L *e* $L-\delta$ *existe sempre algum dos valores de $f(x)$, por mais pequeno que seja δ; e existe sempre um numero l, tal que os valores de $f(x)$ não podem ser inferiores a l e tal que, ou l representa um valor de $f(x)$, ou entre l e $l+\delta$ existe sempre algum dos valores de $f(x)$.*

Supponhamos que é $b>a$ e dividamos o intervallo entre a e b em dois intervallos eguaes, o que dá os numeros

$$a,\ a+\frac{b-a}{2},\ b,$$

e sejam a_1 o ultimo d'estes tres numeros que $f(x)$ chega a exceder, quando x varia desde α até β, e b_1 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder. Temos

$$a_1=a,\ b_1=a+\frac{b-a}{2}<b,\ b_1-a_1=\frac{b-a}{2},$$

quando $f(x)$ não póde exceder $a+\frac{b-a}{2}$, e

$$a_1=a+\frac{b-a}{2}>a,\ b_1=b,\ b_1-a_1=\frac{b-a}{2},$$

quando $f(x)$ chega a exceder $a+\frac{b-a}{2}$.

Dividamos em seguida o intervallo entre a_1 e b_1 em dois intervallos eguaes, o que dá os numeros

$$a_1,\ a_1+\frac{b_1-a_1}{2},\ b_1,$$

e sejam a_2 o ultimo d'estes numeros que $f(x)$ chega a exceder e b_2 o primeiro que $f(x)$ não póde exceder. Temos

$$a_2 \overline{>} a_1, \quad b_2 \overline{\overline{<}} b_1, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se um grupo de numeros crescentes

$$a, \; a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n, \; \ldots,$$

que $f(x)$ chega a exceder, e um grupo de numeros decrescentes

$$b, \; b_1, \; b_2, \; \ldots, \; b_n, \; \ldots,$$

que $f(x)$ não póde exceder, taes que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Os numeros a, a_1, a_2, etc. tendem para um numero racional ou irracional L; e, como a differença $b_n - a_n$ tende para zero, quando n tende para o infinito, segue-se que os numeros b, b_1, b_2, etc. tendem tambem para o limite L. Como porém $f(x)$ não póde exceder os numeros b, b_1, b_2, etc., esta funcção não póde exceder L; e, como, por outra parte, temos

$$\mathrm{L} - f(x) < \mathrm{L} - a_n < b_n - a_n,$$

ou

$$\mathrm{L} - f(x) < \frac{b-a}{2^n},$$

ou, dando a n um valor tão grande que seja $\frac{b-a}{2^n} < \delta$,

$$\mathrm{L} - f(x) < \delta,$$

vê-se que $f(x)$ chega a exceder $\mathrm{L} - \delta$, quando x varia desde α até β, por mais pequeno que seja δ, o que é a primeira parte do theorema.

Do mesmo modo se demonstra a existencia de um numero l que satisfaz ás condições do theorema.

Aos numeros L e l chama-se respectivamente *limite superior* e *limite inferior* dos valores considerados da funcção.

Nota. É facil de ver que o theorema precedente tem logar no caso mais geral de se considerar, em logar de uma funcção, um grupo qualquer de numeros comprehendidos entre a e b.

36. Seja $f(x)$ uma funcção definida na visinhança do ponto a. Se $f(a+h)$ tende para $f(a)$, quando h tende para zero, e isto tem logar qualquer que seja a serie de valores pelos quaes passa h, diz-se que a funcção $f(x)$ é *continua* no ponto a. Se no ponto a a funcção não é continua, diz-se que é *discontinua.*

D'esta definição e do que se disse no n.º 15-1.º e no n.º 16 a respeito da noção de limite decorrem immediatamente as seguintes proposições:

1.º *É condição necessaria e sufficiente para que a funcção $f(x)$ seja continua no ponto a, que a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero positivo ε, tal que a desegualdade*

$$(1) \qquad |f(a+h) - f(a)| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h| < \varepsilon$.

2.º *A somma, o producto, o quociente (quando o divisor não é nullo no ponto a) e as raizes de funcções de x, continuas no ponto a, são funcções de x, continuas no mesmo ponto.*

Com effeito, sendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ estas funcções e $f(x)$ a sua somma, temos (n.º 16-1.º)

$$\lim_{h=0} f(a+h) = \lim_{h=0} \varphi(a+h) + \lim_{h=0} \psi(a+h) = \varphi(a) + \psi(a) = f(a).$$

Do mesmo modo se demonstram os theoremas relativos ao producto, ao quociente e á raiz, baseando-se nos theoremas 2.º, 3.º e 4.º do n.º 16.

3.º *Se $y = \varphi(x)$ representa uma funcção continua de x no ponto a e $z = \psi(y)$ uma funcção continua de y no ponto b, correspondente a $x = a$, a funcção de funcção $z = \psi[\varphi(x)]$ é continua no ponto $x = a$.*

Com effeito, quando x tende para a, y tende para b, e z tende para $\psi(b)$, e portanto para $\psi[\varphi(a)]$, visto ser $\psi(b) = \psi[\varphi(a)]$.

37. Os theoremas seguintes dão propriedades importantes das funoções continuas:

THEOREMA 1.º *Se a funcção $f(x)$ fôr continua em todos os pontos, desde $x = a$ até $x = b$, e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem signaes contrarios, entre a e b existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$* (Cauchy).

Supponhamos $b > a$ e dividamos o intervallo de $x = a$ a $x = b$ em duas partes eguaes, o que dá os numeros

$$a,\ a + \frac{b-a}{2},\ b.$$

Se o segundo numero annullar a funcção, está o theorema verificado. No caso contrario, representando por a_1 e b_1 dois d'estes numeros que sejam consecutivos e dêem á funcção

signaes contrarios, temos

$$a_1 = a,\ b_1 = a + \frac{b-a}{2} < b,\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

quando a e $a + \frac{b-a}{2}$ dão á funcção signaes contrarios, e

$$a_1 = a + \frac{b-a}{2} > a,\ b_1 = b,\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2},$$

no caso contrario.

Dividamos do mesmo modo o intervallo de $x = a_1$ a $x = b_1$ em dois intervallos eguaes, o que dá o numeros

$$a_1,\ a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2},\ b_1,$$

e chamemos a_2 e b_2 os dois numeros consecutivos d'este grupo que dão a $f(x)$ signaes contrarios; temos

$$a_2 \geqq a_1,\ b_2 \leqq b_1,\ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se um grupo

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

de numeros crescentes e um grupo

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots$$

de numeros descrecentes, maiores do que os numeros do grupo anterior e taes que

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Os numeros do primeiro grupo tendem para um numero racional ou irracional c; e, por ser a funcção $f(x)$ contínua no intervallo de $x = a$ a $x = b$, os numeros $f(a_1)$, $f(a_2)$, etc. devem tender para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estes numeros (n.º 13-3.º).

Os numeros b_1, b_2, etc. tendendo tambem para c, os numeros $f(b_1)$, $f(b_2)$, etc. tendem tambem para um limite $f(c)$, que deve ser nullo ou ter o mesmo signal que estes numeros.

Mas $f(c)$ não póde ter ao mesmo tempo o signal de $f(a_n)$ e de $f(b_n)$, porque estes numeros têem signaes contrarios; logo $f(c) = 0$.

THEOREMA 2.º *Se a funcção $f(x)$ é continua em todos os pontos, desde $x=a$ até $x=b$, e A e B são dois valores de $f(x)$, correspondentes aos valores a e b de x, $f(x)$ passa por todos os valores comprehendidos entre A e B, quando x varia desde a até b.*

Com effeito, sendo C um valor comprehendido entre A e B e portanto $A > C > B$, as quantidades $f(a)-C$ e $f(b)-C$ têem signaes contrarios; logo existe um valor x_1 de x, comprehendido entre a e b (theorema 1.º), tal que é $f(x_1)-C=0$.

THEOREMA 3.º *Se a funcção $f(x)$ for continua no intervallo de $x=a$ a $x=b$, incluindo a e b, existe um limite superior e um limite inferior dos valores que ella tem neste intervallo, e estes limites representam valores da funcção* (Weierstrass).

É evidente que, se $f(x)$ não tivesse limite superior no intervallo de $x=a$ a $x=b$, tambem não teria limite superior n'um pelo menos dos intervallos que resultam de dividir aquelle em duas partes iguaes; e que, se $f(x)$ tiver limite superior no intervallo considerado, este limite coincide com o limite superior correspondente a um (a_1 a b_1) dos intervallos parciaes. Continuando depois, como na demonstração do theorema 1.º, é facil de ver que, se não existir limite superior, haverá dois grupos de numeros

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

que tenderão para o mesmo limite c, taes que não existirá limite superior dos valores que toma $f(x)$, quaado x varia desde a_n até b_n; e que, se existir um limite superior L, este numero será tambem o limite superior dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde a_n até b_n.

Mas, por ser a funcção $f(x)$ contínua no ponto c, a cada valor de δ corresponde um numero positivo h_1, tal que a desegualdade

$$|f(c+h)-f(c)|<\delta$$

é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1. Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c-h_1$ e $c+h_1$, vê-se que é

$$|f(x)-f(c)|<\delta,$$

quando x está comprehendido entre a_n e b_n, e portanto que $f(x)$ está comprehendido entre $f(c)+\delta$ e $f(c)-\delta$. Existe pois um limite superior a L (n.º 35) dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde a até b.

Para mostrar que este limite é um valor de $f(x)$, basta notar que, por ser tambem L o

limite superior dos valores que toma $f(x)$, quando x varia desde a_n até b_n, temos para alguns d'estes valores de x, por definição (n.º 35),

$$f(x') > L - \delta',$$

por mais pequeno que seja δ', e portanto

$$f(c) + \delta > L - \delta';$$

o que dá, fazendo tender δ e δ' para zero, $f(c) = L$, visto que $f(c)$ não póde ser maior do que L.

Por um raciocinio semelhante se demonstra a parte do theorema que se refere ao limite inferior.

THEOREMA 4.º *Se a funcção $f(x)$ for continua em todos os pontos desde $x = a$ até $x = b$, incluindo a e b, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor ε, tal que a desegualdade*

$$|f(x') - f(x)| < \delta$$

é satisfeita por todos aquelles valores de x e x', pertencentes ao intervallo considerado, cuja differença é menor, em valor absoluto, do que ε (G. Cantor).

Com effeito, se o theorema não tivesse logar, tambem não teria logar n'um, pelo menos, dos intervallos que resultam de dividir o intervallo de $x = a$ a $x = b$ em duas partes eguaes por meio dos numeros

$$a, \; a - \frac{b-a}{2}, \; b;$$

porque, se o theorema tivesse logar nos dois intervallos, teriamos, representando por x_1 e x'_1 dois valores de x pertencentes ao primeiro intervallo, por x_2 e x'_2 dois valores de x pertencentes ao segundo e por α o valor que tem x no ponto de separação dos dois intervallos,

$$|f(x'_1) - f(x_1)| < \delta, \quad |f(x'_2) - f(x_2)| < \delta,$$

$$|f(x_1) - f(\alpha)| < \frac{1}{2}\delta, \quad |f(x_2) - f(\alpha)| < \frac{1}{2}\delta,$$

quando $|x'_1 - x_1| < \varepsilon_1$, $|x'_2 - x_2| < \varepsilon_2$, $|x_1 - \alpha| < \varepsilon_3$, $|x_2 - \alpha| < \varepsilon_4$, e, por ser

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq |f(x_1) - f(\alpha)| + |f(x_2) - f(\alpha)| < \delta,$$

as condições do theorema verificavam-se em todo o intervallo de $x=a$ a $x=b$ dando a ε o menor dos valores ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

Chamando a_1 e b_1 as extremidades d'aquelle dos intervallos precedentes no qual o theorema não teria logar, vê-se que o theorema tambem não deveria ter logar n'um pelo menos dos intervallos parciaes que resultam de dividir o intervallo $x=a_1$ a $x=b_1$ em duas partes eguaes por meio dos numeros

$$a_1,\ a_1+\frac{b_1-a_1}{2},\ b_1.$$

Continuando do mesmo modo, como na demonstração do theorema 1.º, é facil de ver que, se o theorema não fosse verdadeiro, haveria dois grupos de numeros

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,$$

que tenderiam para o limite c, taes que o theorema não seria tambem verdadeiro no intervallo de $x=a_n$ a $x=b_n$.

Mas, por ser a funcção $f(x)$ continua no ponto c, a cada valor δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1, tal que é

$$|f(c+h)-f(c)|<\frac{1}{2}\delta,$$

quando h está comprehendido entre $-h_1$ e $+h_1$. Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c-h_1$ e $c+h_1$, a desegualdade

$$|f(x)-f(c)|<\frac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de x comprehendidos entre a_n e b_n. Chamando pois x' um valor de x comprehendido entre estes numeros, temos

$$|f(x')-f(c)|<\frac{1}{2}\delta.$$

D'esta desegualdade e da anterior tira-se (n.º 11) a desegualdade

$$|f(x')-f(x)|\overline{\gtrless}|f(x')-f(c)|+|f(x)-f(c)|<\delta,$$

que é satisfeita por todos os valores de x e de x' comprehendidos entre a_n e b_n. Logo o theorema tem logar para o intervallo de $x = a_n$ a $x = b_n$, e portanto tambem tem logar para o intervallo de $x = a$ a $x - b$.

38. Se uma quautidade variavel u depende de outras variaveis x, y, etc., diz-se que u é funcção das variaveis x, y, etc. e escreve-se

$$u = f(x, y, \dots), \quad u = F(x, y, \dots), \text{ etc.}$$

A funcção $f(x, y, \dots)$, definida na visinhança dos pontos $x = a$, $y = b$, etc., diz-se *continua* no ponto $(a, b, c, \dots)$, se $f(a+h, b+k, \dots)$ tende para $f(a, b, \dots)$, quando h, k, etc. tendem para zero, e isto tem logar qualquer que seja o modo como estas quantidades tendam para zero.

É facil de estender os theoremas que demonstrámos nos numeros anteriores para as funcções de uma variavel, ao caso das funcções de muitas variaveis. Assim temos, limitando-nos aos theoremas de que teremos de fazer uso:

1.º *É condição necessaria e sufficiente para que a funcção $f(x, y, \dots)$ seja continua no ponto $(a, b, \dots)$, que a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponda um numero ε, tal que a desegualdade*

$$|f(a+h, b+k, \dots) - f(a, b, \dots)| < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h, k, etc. que satisfizerem ás condições $|h| < \varepsilon$, $|k| < \varepsilon$, etc.

2.º *A somma, o producto, o quociente [quando o divisor não é nullo no ponto $(a, b, \dots)$] e as raizes de funcções continuas no ponto $(a, b, \dots)$ são funcções de x, y, etc., continuas no mesmo ponto.*

Estes dois principios são corollarios dos principios a que nos referimos no n.º 17.

3.º *Se a funcção $f(x, y)$ for continua para todos os valores de x e y representados pelos pontos de uma área limitada A (incluindo o contorno), existe um limite superior e um limite inferior dos valores que ella toma nos pontos d'essa área, e estes limites representam valores da funcção.*

Sejam a e b o menor e o maior dos valores que toma x na área considerada e a' e b' o menor e o maior dos valores que toma y na mesma área, e tracemos as duas parallelas aos eixos coordenados cujas equações são $x = \frac{1}{2}(a+b)$, $y = \frac{1}{2}(a'+b')$, as quaes dividem a área em quatro novas áreas. Se a funcção $f(x, y)$ não tiver limite superior na área A, tambem o não tem n'uma pelo menos das partes em que se dividiu esta área; e, se a funcção $f(x, y)$ tiver limite superior na área A, este limite coincide com o limite superior correspondente a uma d'estas partes de A. Seja A_1 a parte de A a que vimos de nos referir, e sejam

a_1, a'_1, b_1, b'_1 os menores e os maiores valores que tomam respectivamente x e y n'esta ultima área: temos

$$a_1 \overline{\gtrless} a,\ b_1 \overline{\lessgtr} b,\ a'_1 \overline{\gtrless} a',\ b'_1 \overline{\lessgtr} b',\ b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a),\ b'_1 - a'_1 = \frac{1}{2}(b'-a').$$

Dividindo do mesmo modo a área A_1 em quatro novas áreas por meio das rectas cujas equações são $x = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, $y = \frac{1}{2}(a'_1 + b'_1)$, fórma-se como anteriormente uma área A_2, tal que, se a funcção não tiver limite superior em A, tambem o não tem em A_2, e, se a funcção tiver limite superior em A, este limite coincide com o que a funcção tem em A_2; e temos, representando por a_2, a'_2, b_2 e b'_2 os menores e os maiores valores que tomam respectivamente x e y na área A_2,

$$a_2 \overline{\gtrless} a_1,\ a'_2 \overline{\gtrless} a'_1,\ b_2 \overline{\lessgtr} b_1,\ b'_2 \overline{\lessgtr} b'_1,$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2},\quad b'_2 - a'_2 = \frac{b'-a'}{2^2}.$$

Continuando do mesmo modo, formam-se duas series de numeros crescentes $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots)$, e duas series de numeros decrescentes $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ e $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots)$, que satisfazem ás condições

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},\quad b'_n - a'_n = \frac{b'-a'}{2^n},$$

e que portanto tendem a primeira e a terceira para um limite c e a segunda e a quarta para um limite d; e fórma-se uma serie de áreaes $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, contendo todas no interior o ponto (c, d), taes que, se $f(x, y)$ não tiver limite superior na área A, tambem o não tem na área A_n, e, se tiver um limite superior L na área A, este numero é tambem o limite superior dos valores que toma aquella funcção na área A_n. N'esta área os valores de x e y estão respectivamente comprehendidos entre a_n e b_n e entre a'_n e b'_n.

Mas, por ser a funcção $f(x, y)$ continua no ponto (c, d), a cada valor dado a δ corresponde um numero ε, tal que a desegualdade

$$|f(x, y) - f(c, d)| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de x e y respectivamente comprehendidos entre $c - \varepsilon$ e $c + \varepsilon$ e entre $d - \varepsilon$ e $d + \varepsilon$; e por isso, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - \varepsilon$ e $c + \varepsilon$ e a'_n e b'_n fiquem comprehendidos entre $d - \varepsilon$ e $d + \varepsilon$, a mesma desegualdade é satisfeita pelos valores de x e y que representam os pontos da área A_n. Logo os valores correspondentes de $f(x, y)$ estão comprehendidos entre $f(c, d) - \delta$ e $f(c, d) + \delta$, e

existe portanto (n.º 35) um limite superior L dos valores que $f(x, y)$ toma na área A_n e, por consequencia, na área A.

Para demonstrar que o limite, cuja existencia vimos de mostrar, é um valor da funcção $f(x, y)$, notemos que, por ser tambem L o limite superior dos valores que toma $f(x, y)$ na área A_n temos, para alguns dos valores de x e y representados pelos pontos de A_n,

$$f(x, y) > L - \delta',$$

por mais pequeno que seja δ', e portanto

$$f(c, d) + \delta > L - \delta';$$

o que dá, fazendo tender δ e δ' para zero, $f(c, d) = L$, visto que $f(c, d)$ não póde ser maior do que L.

Do mesmo modo se mostra que o limite inferior existe e é um valor da funcção.

4.º *Se a funcção $f(x, y)$ fôr continua em todos os pontos (x, y) de uma área fechada A (incluindo o contorno), a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero ε, tal que a desegualdade*

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \delta$$

é satisfeita por todos os grupos de valores de (x, y) e de (x', y'), representados pelos pontos da área A, que satisfazem ás condições $|x - x'| < \varepsilon$, $|y - y'| < \varepsilon$.

Divida-se, como na demonstração do theorema anterior, a área A em quatro áreas por meio das rectas $x = \frac{1}{2}(a + b)$, $y = \frac{1}{2}(a' + b')$. Vê-se, como no caso das funcções d'uma variavel (n.º 37-4.º), que, se o theorema não tivesse logar na área A, tambem não teria logar n'uma pelo menos A_1 das áreas em que se dividiu A. Continuando depois, como na demonstração do theorema anterior, podemos formar duas series de numeros $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, que tendem para um limite c, e duas series de numeros $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots)$ e $(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$, que tendem para um limite d, taes que, se o theorema enunciado não fosse verdadeiro para a área A, não o seria tambem para a parte A_n da área A, que está comprehendida no rectangulo cujos lados têem as equações $x = a_n$, $x = b_n$, $y = a'_n$, $y = b'_n$.

Mas, por ser a funcção $f(x, y)$ contínua no ponto (c, d), a cada valor de δ corresponde um numero ε, tal que é

$$|f(x, y) - f(c, d)| < \frac{1}{2}\delta,$$

quando x e y estão respectivamente comprehendidos entre $c - \varepsilon$ e $c + \varepsilon$ e entre $d - \varepsilon$ e $d + \varepsilon$. Logo, dando a n um valor tão grande que a_n e b_n fiquem comprehendidos entre $c - \varepsilon$ e

$c+\varepsilon$ e a'_n e b'_n fiquem comprehendidos entre $d-\varepsilon$ e $d+\varepsilon$, a desegualdade anterior é satisfeita por todos os valores de x e y representados pelos pontos da área A_n, o que dá, sendo x' e y' dois valores de x e y que satisfaçam a esta condição,

$$|f(x', y')-f(c, d)|<\frac{1}{2}\delta.$$

D'esta desegualdade e da anterior tira-se a desegualdade

$$|f(x', y')-f(x, y)|<\delta,$$

que é satisfeita pelos valores de (x, y) e (x', y') que representam pontos da área A_n. Logo o theorema enunciado tem logar na área A_n, e portanto tambem tem logar na área A.

Do mesmo modo se demonstram os theoremas seguintes:

5.º *Se a funcção $f(x, y, z)$ for continua para todos os valores de x, y e z representados pelos pontos de um volume limitado V (incluindo a superficie que o limita), a funcção admitte um limite superior e um limite inferior dos valores que toma nos pontos d'este volume, e estes limites são valores da funcção.*

6.º *Se a funcção $f(x, y, z)$ for continua em todos os pontos (x, y, z) de um volume limitado V (incluindo a superficie que o limita), a cada valor da quantidade positiva δ corresponde um numero ε, tal que a desegualdade*

$$|f(x', y', z')-fx, y, z)|<\delta$$

é satisfeita por todos os grupos de valores de (x, y, z) e (x', y', z'), representados pelos pontos do volume considerado, que satisfazem ás condições $|x-x'|<\varepsilon$, $|y-y'|<\varepsilon$, $|z-z'|<\varepsilon$.

39. *Funcções de variaveis imaginarias.* — Se os valores de uma variavel $u=X+iY$ dependem dos valores de outra variavel $z=x+iy$, diz-se que u é *funcção de z*.

A funcção $f(x+iy)$ diz-se *continua* no ponto $a+ib$, se a funcção $f[a+h+i(b+k)]$ tende para $f(a+ib)$, quando h e k tendem para zero, e isto tem logar qualquer que seja o modo como h e k tendam para zero; ou, em outros termos (n.º 19), se X e Y são funcções continuas de x e y.

D'esta definição decorre immediatamente que *a somma, o producto e o quociente* [*quando $\psi(a+ib)$ é differente de* 0] *de duas funcções $\varphi(z)$ e $\psi(z)$, continuas no ponto $a+ib$, é uma funcção de z continua no mesmo ponto.*

Com effeito, pondo

$$\varphi(z)=X+iY,\ \psi(z)=X_1+iY_1,$$

temos as relações

$$\varphi(z)+\psi(z)=X+X_1+i(Y+Y_1),$$

$$\varphi(z)\psi(z)=XX_1-YY_1+i(XY_1+YX_1),$$

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{XX_1+YY_1}{X_1^2+Y_1^2}+i\frac{YX_1-XY_1}{X_1^2+Y_1^2},$$

das quaes se tira o theorema enunciado, visto que a parte independente de i e o coefficiente de i, que entram no segundo membro de cada uma d'estas relações, são (n.º 38-2.º) funcções continuas de x e y.

Vé-se tambem, como no n.º 36, que, se $u=\varphi(z)$ representa uma funcção continua de z no ponto α e $t=\psi(u)$ uma funcção continua de u no ponto β, correspondente a $z=\alpha$, a funcção de funcção $\psi[\varphi(z)]$ é continua no ponto $z=\alpha$.

II

Funcções algebricas

40. Seja $f(z)$ uma expressão analytica dada, dependente da variavel real ou imaginaria z. Se, para calcular o seu valor, for necessario executar sobre z sómente *operações algebricas* (isto é, addições, subtracções, multiplicações, elevações a potencia e extracções de raiz), em numero finito, a funcção diz-se *algebrica*. As funcções que não são algebricas dizem-se *transcendentes*.

Se a funcção $f(z)$ for algebrica, mas não contiver radicaes que affectem a variavel z, esta funcção diz-se *racional;* no caso contrario diz-se *irracional.*

Se a funcção $f(z)$ for racional, mas não contiver z em denominador, esta funcção diz se *inteira;* no caso contrario diz-se *fraccionaria.*

Seja $F(z, u)=0$ uma equação que determine u, quando z é dado. N'este caso diz-se que u é uma funcção de z dada debaixo de fórma *implicita,* ou, em termos mais breves, que u é funcção *implicita* de z. Resolvendo a equação precedente relativamente a u, quando isto for possivel, obtem-se u em funcção *explicita* de z.

Se o primeiro membro da equação precedentemente considerada representar uma funcção algebrica de u e z, isto é, se para calcular $F(u, z)$, quando u e z são dados, for necessario sómente executar sobre estas variaveis operações algebricas, em numero finito, diz-se que u

é funcção *algebrica implicita* de z. Demonstra-se em Algebra, como consequencia de theoria da eliminação, que, n'este caso, a equação precedente póde ser sempre reduzida á fórma

$$a_m u^m + a_{m-1} u^{m-1} + \dots + a_1 u + a_0 = 0, \tag{1}$$

onde m é um numero inteiro positivo e a_0, a_1, a_2, etc. são polynomios ordenados segundo as potencias inteiras e positivas de z.

N'este logar occupar-nos-hemos sómente das funcções racionaes, inteiras e fraccionarias, para recordar algumas das suas propriedades mais importantes.

41. Consideremos primeiramente as *funcções inteiras*, isto é as funcções da fórma

$$u = f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_n,$$

onde n é um numero inteiro positivo e A_0, A_1, etc. são constantes reaes ou imaginarias.

I. Mudando z em $z+h$, temos

$$f(z+h) = A_0 (z+h)^n + A_1 (z+h)^{n-1} + \dots + A_k (z+h)^{n-k} + \dots + A_{n-1} (z+h) + A_n,$$

ou, desenvolvendo as potencias inteiras do binomio $z+h$ e ordenando o resultado segundo as potencias de h,

$$\begin{aligned} f(z+h) = {} & A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n \\ & + h \left[n A_0 z^{n-1} + (n-1) A_1 z^{n-2} + \dots + A_{n-1} \right] \\ & + \frac{h^2}{1.2} \left[n(n-1) A_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 z^{n-3} + \dots \right] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{h^k}{1.2\dots k} \left[(n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots \right] \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + A_0 h^n, \end{aligned}$$

pondo

$$(n)_k = n(n-1)\dots(n-k+1), \text{ etc.}$$

Representando os coefficientes de h, $\frac{1}{2} h^2$, $\frac{1}{2.3} h^3$, etc. por $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc., vem a egualdade

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{h^2}{1.2} f''(z) + \dots + \frac{h^k}{1.2\dots k} f^{(k)}(z) + \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(z),$$

que tem o nome de *fórmula de Taylor*.

As funcções $f'(z)$, $f''(z)$, etc. são respectivamente do grau $n-1$, $n-2$, etc., e a sua lei de formação é dada pela fórmula seguinte:

$$f^{(k)}(z) = (n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots$$

A estas funcções dão-se respectivamente os nomes de *derivada de primeira ordem*, de *derivada de segunda ordem*, etc. da funcção $f(z)$.

Da comparação da fórmula precedente com a correspondente a $k+1$

$$f^{(k+1)}(z) = (n)_{k+1} A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_{k+1} A_1 z^{n-k-2} + \dots$$

$$= (n)_k (n-k) A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_k (n-k-1) A_1 z^{n-k-2} + \dots$$

tira-se a seguinte regra, para formar as derivadas successivas de $f(z)$:

Para passar de uma funcção para a sua derivada ou de uma derivada para a seguinte, multiplique-se em cada termo da primeira o expoente de z pelo coefficiente e diminua-se o expoente de uma unidade.

Por exemplo, no caso de

$$f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^2 - 7,$$

vem

$$f'(z) = 5z^4 - 12z^3 + 8z,$$

$$f''(z) = 20z^3 - 36z^2 + 8,$$

. . . .

II. A fórmula de Taylor mostra que $f(z+h)$ tende para $f(z)$, quando h tende para 0, e portanto que *a funcção inteira $f(z)$ é continua, qualquer que seja z.*

III. *A funcção inteira (z) é o producto de n factores do primeiro grau:*

$$\text{(A)} \qquad f(z) = A_0 (z-a)^{\alpha} (z-b)^{\beta} \dots (z-l)^{\lambda},$$

onde a, b, ..., l são as raizes da equação $f(z) = 0$.

Este theorema importante é uma consequencia do principio fundamental da theoria das equações, que vamos primeiramente demonstrar:

A equação algebrica $f(z)=0$ admitte pelo menos uma raiz [1].

Consideremos os valores de $z=x+iy$ representados pelos pontos da área de um circulo, cujo centro esteja na origem das coordenadas e cujo raio seja um numero R, que vamos determinar de modo que o limite inferior dos valores que toma $|f(z)|$, na área considerada, não corresponda a ponto algum da circumferencia d'este circulo. Para isso, notemos que da egualdade

$$A_0 z^n = f(z) - A_1 z^{n-1} - \dots - A_n$$

se tira, suppondo $|z|>1$,

$$|A_0||z|^n \geqq |f(z)| - |A_1||z|^{n-1} - \dots - |A_n| > |f(z)| - [|A_1| + \dots + |A_n|]|z|^{n-1},$$

e portanto

$$|f(z)| > |A_0||z| - [|A_1| + \dots + |A_n|],$$

e que esta ultima desegualdade faz vêr que é $|f(z)|>|A_n|$, quando

$$|z| > \frac{|A_n| + |A_1| + \dots + |A_n|}{|A_0|}.$$

Logo, escolhendo R de tal modo que seja

$$R>1,\ R>\frac{|A_n| + |A_1| + \dots + |A_n|}{|A_0|},$$

$|f(z)|$ toma nos pontos da circumferencia considerada um valor maior do que o valor $|A_n|$, que toma no centro.

Posto isto, seja $f(x+iy) = X + iY$. Por ser continua a funcção considerada, tambem são continuas as funcções X e Y, assim como (n.º 38-2.º) a funcção $|f(z)|$, que é egual a $\sqrt{X^2+Y^2}$. Logo $|f(z)|$ tem um limite inferior, na área do circulo considerado, e este limite é um valor da funcção (n.º 38-3.º).

Seja pois l este limite e z' o valor de z que dá $|f(z')| = l$. Vamos mostrar que é $l=0$.

---

[1] Foi Gauss quem deu as primeiras demonstrações rigorosas d'este importante theorema. Depois têem sido dadas muitas outras, como se póde vêr em uma noticia que sobre ellas publicou G. Loria no t. I da *Rivista di Matematica* (Pavia, 1900).

Se l fosse differente de zero, pondo $z = z' + h$, $z' + h$ representando um ponto do interior do circulo considerado, e suppondo que $f^{(p)}(z')$ é a primeira das quantidades $f'(z'), f''(z'), \ldots$ que não é nulla, a fórmula de Taylor daria

$$f(z'+h) = f(z') + \frac{h^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(z') + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(z'),$$

ou, representando por α uma quantidade real comprehendida entre 0 e 1, fazendo

$$h = \beta \sqrt[p]{\alpha}, \quad \beta = \sqrt[p]{-1.2\ldots p \frac{f(z')}{f^{(p)}(z')}},$$

onde daremos o valor real ao radical que entra na expressão de h e um qualquer dos seus valores ao radical que entra na expressão de β, e eliminando h e $f^{(p)}(z')$ por meio d'estas equações,

$$f(z'+h) = f(z')(1-\alpha) + \lambda + i\eta_1,$$

pondo

$$\lambda + i\eta_1 = \frac{\beta^{p+1}\alpha^{\frac{p+1}{p}}}{1.2\ldots(p+1)} f^{(p+1)}(z') + \ldots + \frac{\beta^n \alpha^{\frac{n}{p}}}{1.2\ldots n} f^{(n)}(z').$$

Mas, representando por P uma quantidade superior aos modulos dos coefficientes de α na somma precedente, é

$$|\lambda + i\eta_1| < \mathrm{P}\left(\alpha^{\frac{p+1}{p}} + \alpha^{\frac{p+2}{p}} + \ldots + \alpha^{\frac{n}{p}}\right) < (n-p)\,\mathrm{P}\alpha^{\frac{p+1}{p}}.$$

Logo teriamos

$$|f(z'+h)| < |f(z')|(1-\alpha) + (n-p)\,\mathrm{P}\alpha^{\frac{p+1}{p}}$$

ou

$$|f(z'+h)| < |f(z')| - \alpha\left[|f(z')| - (n-p)\,\mathrm{P}\alpha^{\frac{1}{p}}\right],$$

ou ainda, obrigando α, que já está sujeito a estar comprehendido entre 0 e 1, a satisfazer á desegualdade

$$|f(z')| - (n-p)\,\mathrm{P}\alpha^{\frac{1}{p}} > 0,$$

*

dando-lhe por isso um valor assaz pequeno,

$$|f(z'+h)| < |f(z')|;$$

o que é absurdo, visto que $|f(z')|$ é o limite inferior dos valores de $|f(z)|$.

Deve pois ser $f(z')=0$, que é o que queriamos demonstrar.

É facil de demonstrar agora a fórmula (A).

Com effeito, dividindo $f(z)$ por $z-z'$ vem um quociente q da fórma $A_0 z^{n-1}+\ldots$ e um resto r independente de z, e temos a egualdade

$$f(z)=q(z-z')+r,$$

que, pondo $z=z'$, dá $f(z)=r=0$, e portanto

$$f(z)=q(z-z').$$

Temos do mesmo modo

$$q=q'(z-z''),$$

q' representando uma funcção inteira da fórma $A_0 z^{n-2}+\ldots$ e z'' uma raiz de $q=0$; e portanto

$$f(z)=q'(z-z')(z-z'').$$

Continuando do mesmo modo, até chegar a um quociente constante, obtem-se a fórmula

$$f(z)=A_0(z-z')(z-z'')\ldots(z-z^{(n)}),$$

da qual se tira a fórmula (A), suppondo α das quantidades z', z'', ... eguaes a a, β das mesmas quantidades eguaes a b, etc.

42. Consideremos agora as *funcções racionaes fraccionarias,* isto é as funcções da fórma:

$$u=f(z)=\frac{a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_n}{a_0 z^p+a_1 z^{p-1}+\ldots+a_p}.$$

I. Suppondo $n>p$, póde effectuar-se a divisão do numerador pelo denominador e reduzir d'este modo u á fórma

$$u=F(z)+\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

onde $F(z)$, $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ são funcções inteiras, taes que o grau de $\varphi(z)$ é menor do que o de $\psi(z)$.

Consideremos agora a fracção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ e supponhamos que, decompondo $\psi(z)$ em factores, vem

$$\psi(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta} \ldots (z-l)^{\lambda}.$$

N'este caso *a fracção* $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ *é susceptivel da decomposição seguinte:*

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = & \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} \\ & + \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L_1}{z-l} + \frac{L_2}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(z-l)^\lambda},\end{aligned}$$

onde os numeradores são quantidades constantes (¹).

Demonstra-se esta proposição importante do modo seguinte:

Pondo

$$\psi_1(z) = (z-b)^{\beta} \ldots (z-l)^{\lambda}$$

e chamando $\varphi_1(z)$ o quociente e R o resto da divisão de $\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z)$ por $z-a$, temos

$$\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z) = \varphi_1(z)(z-a) + R$$

e, pondo $z = a$,

$$R = \varphi(a) - A_\alpha \psi_1(a).$$

Determinando pois A_α de modo que R seja nullo, pondo para isso

$$A_\alpha = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)},$$

(¹) A theoria da decomposição das funcções racionaes em fracções simples foi esboçada por Leibnitz, nos volumes correspondentes a 1702 e 1703 das *Acta eruditorum* de Leipzig, e por João Bernoulli, no volume correspondente a 1702 das *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*. Euler foi quem primeiro lhe deu uma fórma completa (*Introductio in Analysin infinitorum*, cap. II).

vem

$$\varphi(z) = A_\alpha \psi_1(z) + \varphi_1(z)(z-a),$$

d'onde se tira, dividindo por $\psi(z)$,

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\psi_1(z)}.$$

Do mesmo modo obtemos

$$\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\psi_1(z)} = \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(z)}{(z-a)^{\alpha-2}\psi_1(z)}.$$

Continuando do mesmo modo, acha-se finalmente a egualdade

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z-a} + \frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}.$$

Depois applica-se a $\frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}$ o mesmo processo que se applicou a $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, e continua-se do mesmo modo até chegar á decomposição enunciada.

Pelo processo anterior determinam-se as constantes A_1, A_2, etc., B_1, B_2, etc.; mas, attendendo á importancia d'esta questão, vamos expor um processo mais simples para esta determinação.

Pondo na egualdade precedente $z = a + h$, vem

$$\frac{\varphi(a+h)}{h^\alpha \psi_1(a+h)} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{h} + \frac{\varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)} = A_\alpha + A_{\alpha-1} h + \ldots + A_1 h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi_\alpha(a+h)}{\psi_1(a+h)}.$$

Este resultado mostra que, para achar A_α, $A_{\alpha-1}$, ..., A_1, basta dividir $\varphi(a+h)$ por $\psi_1(a+h)$, tendo o cuidado de ordenar primeiro estes polynomios segundo as potencias crescentes de h. Os coefficientes de h^0, h, ..., $h^{\alpha-1}$ no quociente são as constantes pedidas.

Devemos observar que na formação do numerador e do denominador de $\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)}$ é escusado escrever os termos que contêem potencias de h superiores a $\alpha - 1$, pois que estes termos não influem no quociente.

Do mesmo modo se determinam as outras constantes B_1, B_2, ... [1].

EXEMPLO. Decomponhamos por este processo a fracção

$$\frac{z^2-3z+5}{(z-1)^4(z-2)z}.$$

Pondo n'esta fracção $z=1+h$, excluindo o primeiro factor do denominador e effectuando depois a divisão, vem

$$\frac{\varphi(1+h)}{\psi_1(1+h)}=\frac{3-h+h^2}{-1+h^2}=-3+h-4h^2+h^3+\ldots;$$

logo teremos

$$A_4=-3,\ A_3=1,\ A_2=-4,\ A_1=1.$$

Do mesmo modo, pondo na fracção considerada $z=2+h$ e excluindo o segundo factor do denominador, vem a egualdade

$$\frac{\varphi(2+h)}{\psi_1(2+h)}=\frac{(2+h)^2-3(2+h)+5}{(1+h)^4(2+h)},$$

cujo segundo membro, aproveitando só a parte independente de h no numerador e no denominador, visto que $z-2$ entra na fracção proposta no primeiro grau, se reduz a $\frac{3}{2}$. Logo temos

$$B_1=\frac{3}{2}.$$

Do mesmo modo se acha $C_1=-\frac{5}{2}$.

Temos pois

$$\frac{z^2-3z+5}{(z-1)^4(z-2)z}=\frac{1}{z-1}-\frac{4}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}-\frac{3}{(z-1)^4}$$
$$+\frac{\frac{3}{2}}{z-2}-\frac{\frac{5}{2}}{z}.$$

[1] Ha outros methodos para determinar as constantes A_1, A_2, etc. e ha mesmo fórmulas que dão expressões analyticas d'estas constantes. Podem ver se alguns methodos e fórmulas no nosso trabalho *Sur la décomposition des fractions rationnelles*, publicado no *Jornal de sciencias mathematicas* (t. I e II) e no t. II das nossas *Obras sobre mathematica*.

Nota. No caso de ser $\alpha = 1$, é

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Com effeito, da egualdade

$$\psi(z) = (z - a)\,\psi_1(z),$$

pondo $z = a + h$ e desenvolvendo os dois membros pela fórmula de Taylor, tira-se a identidade

$$\psi(a) + h\psi'(a) + \ldots = h\left[\psi_1(a) + h\psi_1'(a) + \ldots\right],$$

que, devendo ter logar qualquer que seja o valor de h, dá $\psi'(a) = \psi_1(a)$; e portanto temos

$$A_1 = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

II. Vejamos agora se a funcção considerada é ou não continua.

A primeira parte $F(z)$ é continua, por ser uma funcção inteira. A outra parte $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é a somma de fracções da fórma $\frac{A}{(z-a)^{\kappa}}$, onde k é inteiro; logo é continua (n.[os] 36 e 39) em todos os pontos, excepto nos pontos $z = a, b, c, \ldots, l$.

Concluiremos pois que toda a *funcção racional fraccionaria é continua em qualquer ponto z, que não seja raiz do denominador. N'estes pontos a funcção torna-se infinita.*

III

Funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares

43. As *exponenciaes*, os *logarithmos* e as *potencias de expoente irracional* são funcções transcendentes conhecidas desde os Elementos de Algebra; as *funcções circulares* são conhecidas desde a Trigonometria. São as unicas transcendentes estudadas nos Elementos, e o seu estudo é muito importante, por causa da frequencia com que apparecem nas questões a que se applica a Mathematica, e porque serve de preparação para o estudo das outras transcendentes de que se occupa a Analyse mathematica. Vamos por isso aqui recordar succintamente e completar em certos pontos o que a respeito d'estas funcções se ensina nos Elementos.

44. *Exponencial de base e expoente real.* — Viu-se nos Elementos de Algebra qual é a significação de a^x quando a representa um numero racional positivo e x um numero racional, positivo ou negativo. Viu-se tambem que n'este caso a cada valor de x corresponde um valor positivo para a^x, e, além d'este, outro valor negativo quando o denominador de x é par. Considerando só os valores positivos, a^x é uma funcção de x, que tem um unico valor para cada valor racional de x.

Vejamos agora como se define a^x quando a e x são irracionaes, suppondo ainda que a é positivo.

Sejam primeiramente a um numero irracional e x um numero racional, egual a $\frac{p}{q}$. N'este caso define-se $a^{\frac{p}{q}}$ por meio da egualdade

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

cujo segundo membro tem uma significação conhecida (n.º 3-6.º e n.º 7).

Sejam, em segundo logar, a um numero positivo qualquer, x um numero irracional, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ o grupo de numeros racionaes, inferiores a x, que entram na definição (n.º 2) d'este numero, e α um numero racional maior do que x. Se é $a < 1$, os valores positivos de a^{x_n} crescem constantemente, quando n augmenta, sem todavia poderem exceder o numero a^α; logo tendem para um limite (n.º 14-1.º), unico qualquer que seja o grupo de numeros que entrem na definição de x (n.º 15-2.º), que se representa pelo symbolo a^x. Se é $a < 1$, os valores positivos de a^{x_n} decrescem, quando n augmenta, e tendem para um limite, que se representa tambem por a^x.

A funcção a^x, que vimos de definir, chama-se *exponencial*. Vamos ver algumas propriedades d'esta funcção.

I. *O producto de dois valores da exponencial é dado pela fórmula*

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}. \tag{1}$$

A demonstração que se deu d'este theorema nos Elementos de Algebra é applicavel quando x e y são numeros racionaes e a é um numero positivo qualquer.

No caso de x e y representarem numeros irracionaes, temos, chamando y_1, y_2, etc. os numeros racionaes que formam um dos grupos que entram na definição de y,

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n=\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n=\infty} a^{y_n} = \lim_{n=\infty} a^{x_n+y_n} = a^{x+y}.$$

II. *Quando x cresce constantemente desde $-\infty$ até ∞, a^x cresce constantemente desde 0 até ∞, se é $a > 1$, e decresce constantemente desde ∞ até 0, se é $a < 1$.*

Seja primeiramente $a > 1$.

Viu-se na Arithmetica que as potencias de expoente inteiro e as raizes dos numeros maiores do que a unidade são tambem maiores do que a unidade; logo, se h representar um numero racional positivo, é $a^h > 1$. Se h representar um numero irracional positivo e h_1, h_2, etc. representarem os numeros, menores do que h, que entram na sua definição, temos ainda $a^h > 1$, por ser $a^h > a^{h_n} > 1$.

Em virtuda d'esta desegualdade, a fórmula (1) dá $a^{x+h} > a^x$; por onde se vê que a exponencial cresce, quando o expoente cresce.

Para demonstrar que a^x tende para ∞, quando x tende para ∞, basta notar que, chamando m o maior inteiro contido em x, temos

$$a^x > a^m, \quad a^m = (1 + a - 1)^m = 1 + m(a-1) + \ldots;$$

por onde se vê primeiramente que a^m tende para ∞, quando m tende para ∞, e depois que a^x tende para ∞, quando x tende para ∞.

Para demonstrar que a^x tende para 0, quando x tende para $-\infty$, basta notar que, quando x é negativo, o denominador de $\frac{1}{a^{-x}}$ tende para ∞.

Para considerar o caso de ser $a < 1$, basta pôr $a = \frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b > 1$, o denominador de $\frac{1}{b^x}$ cresce desde 0 até ∞, quando x cresce desde $-\infty$ até ∞.

III. *Quando x tende para zero, a^x tende para a unidade.*

Seja primeiramente $a > 1$.

Se x é positivo, temos, pondo $x = \frac{1}{t}$ e chamando m o maior inteiro contido em t,

$$a^x - 1 = a^{\frac{1}{t}} - 1 \overline{\overline{<}} a^{\frac{1}{m}} - 1.$$

Mas da desegualdade

$$\left(1 + \frac{a-1}{m}\right)^m = 1 + a - 1 + \binom{m}{2}\left(\frac{a-1}{m}\right)^2 + \ldots > a$$

tira-se

$$a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a-1}{m}.$$

D'esta desegualdade conclue-se que $a^{\frac{1}{m}} - 1$ tende para zero, quando m tende para o infinito; e da primeira conclue-se depois que $a^x - 1$ tende para zero, quando x tende para zero.

Quando x é negativo, ponha-se $x = -y$, o que dá a egualdade

$$a^x - 1 = -\frac{a^y - 1}{a^y},$$

da qual se tira ainda o principio enunciado, visto que, quando x tende para 0, a^y tende para 1.

Para demonstrar o theorema, no caso de ser $a<1$, basta pôr $a=\frac{1}{b}$ e notar que, por ser $b>1$, $\frac{1}{b^x}$ tende para 1, quando x tende para 0.

IV. *A funcção a^x é continua, qualquer que seja x.*

É o que resulta da egualdade

$$a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$

a qual, attendendo a que a^h tende para 1, quando h tende para 0, mostra que a^{x+h} tende para a^x.

45. Entre as funcções exponenciaes tem principal importancia em Analyse a que tem para base um certo numero, que vamos definir.

Consideremos a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e seja n um numero inteiro.

Temos, desenvolvendo este binomio,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$<2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots,$$

e portanto, sommando os termos da progressão que entra no ultimo membro d'esta desegualdade,

$$\text{(A)} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Por outra parte, a desegualdade

$$\frac{(1-a)^n-1}{(1-a)-1}=(1-a)^{n-1}+(1-a)^{n-2}+\ldots+1<n,$$

que tem logar quando $a<1$, dá

$$(1-a)^n>1-na,$$

e portanto, pondo $a = \frac{1}{n^2}$,

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$

ou

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n},$$

ou

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Esta desegualdade e a desegualdade (A) mostram que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cresce indefinidamente com n e que não póde exceder o numero 3; logo tende para um numero determinado, que se representa pela lettra e. Este resultado coincide com o que se demonstrou, por outro processo, no n.º 30.

Vamos agora mostrar que a expressão considerada tende ainda para o mesmo numero e, quando n tende para o infinito passando por uma serie qualquer de numeros racionaes ou irracionaes, positivos ou negativos.

Seja n positivo e sejam m e $m+1$ dois numeros inteiros, entre os quaes n está comprehendido. Teremos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1},$$

e depois

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

O primeiro e o ultimo membro d'esta desegualdade tendem para e, quando m tende para o infinito. Logo a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende tambem para e.

Se n é negativo e egual a $-m$, temos ainda

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{m=\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\lim_{m=\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m$$

$$=\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m=\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)=e.$$

Póde-se calcular o valor de e, com a approximação que se quizer, dando a n os valores 1, 2, 3, ...; adiante será dado porém outro modo de o calcular, preferivel a este. Vem assim $e=2{,}718281\ldots$

46. *Funcção* e^{x+iy}. — Seja e o numero que vimos de considerar. A definição de e^z, no caso do ser $z=x+iy$, deve ser tal que se recaia na exponencial de expoente real, quando é $y=0$, e que tenha logar o principio fundamental (1). A estas condições satisfaz e^{x+iy}, quando se define pela egualdade, devida a Euler;

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y). \tag{2}$$

Com effeito, temos, pondo $z=x+iy$, $z'=x'+iy'$,

$$\begin{aligned} e^z.e^{z'} &= e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y).e^{x'}(\cos y'+i\operatorname{sen} y') \\ &= e^{x+x'}[\cos(y+y')+i\operatorname{sen}(y+y')]=e^{z+z'}. \end{aligned}$$

Adiante definiremos a^z, no caso de a representar um numero positivo differente de e.

I. Da equação de definição decorre logo uma propriedade importante da exponencial de expoente imaginario, a saber: a sua *periodicidade*. Com effeito, por ser

$$\begin{aligned} e^{z+2ki\pi} &= e^x[\cos(y+2k\pi)+i\operatorname{sen}(y+2k\pi)] \\ &= e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)=e^z, \end{aligned}$$

quando k é inteiro, conclue-se que a exponencial toma o mesmo valor, cada vez que z augmenta de $2i\pi$.

Do mesmo modo se vê que a exponencial toma o mesmo valor, com signal contrario, cada vez que z augmenta de $i\pi$.

II. Do que precede resulta tambem que todo o imaginario se póde exprimir debaixo da fórma de exponencial. Com effeito, temos, ρ sendo o modulo e θ o argumento de z,

$$x+iy=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)=\rho e^{i\theta}.$$

III. Por ser

$$e^{h+ik} = e^h(\cos k + i \operatorname{sen} k)$$

e por e^h, $\cos k$, $\operatorname{sen} k$ tenderem respectivamente para 1, 1, 0, quando h e k tendem para 0, como se viu no n.º 44-III a respeito de e^h, e na Trigonometria a respeito de $\operatorname{sen} k$ e $\cos k$, vê-se que é

$$\lim_{h,\, k=0} e^{h+ik} = 1.$$

Temos porém

$$e^{x+h+i(y+k)} = e^{x+iy} . e^{h+ik}.$$

Logo

$$\lim_{h,\, k=0} e^{x+h+i(y+k)} = e^{x+iy}.$$

A funcção exponencial e^z é pois continua, qualquer que seja z.

47. *Logarithmos reaes.* — Consideremos agora a funcção inversa da exponencial e^x, isto é, a funcção y ligada com x pela equação

$$x = e^y,$$

e supponhamos que x é uma variavel real, positiva ou negativa.

A y chama-se *logarithmo neperiano de x*, em honra de Neper [1], o fundador da theoria dos logarithmos, e, para o representar, emprega-se o signal $\log x$. Tambem se lhe dá o nome de *logarithmo natural* e o de *logarithmo hyperbolico*.

I. *A variavel y é uma funcção definida de x, que, quando x varia desde 0 até ∞, varia desde $-\infty$ até ∞.*

Com effeito, por ser e^y uma funcção continua de y, que varia desde 0 até ∞, quando y

---

[1] Foi Neper, geometra inglez que viveu no seculo XVII, o principal inventor e fundador da theoria dos logarithmos, á qual consagrou duas obras, uma das quaes, intitulada *Merifici logarithmorum canonis descriptio*, foi publicada em 1614, e a outra, intitulada *Merifici logarithmorum constructio*, foi publicada em 1620. A base dos logarithmos considerados primeiramente por Neper não coincide nem com e nem com 10, mas em breve reconheceu a vantagem de adoptar como base este ultimo numero. Briggs publicou em 1624 as primeiras taboas de logarithmos de base 10, aos quaes se dá o nome de *logarithmos vulgares*. Leibnitz e João Bernoulli, principalmente este ultimo, em um trabalho intitulado *Principia calculi exponencialis*, publicado no volume correspondente a 1697 das *Acta eruditorum*, relacionaram o calculo exponencial com o logarithmico.

varia desde $-\infty$ até ∞, se a x dermos um valor positivo a, a y deve corresponder (n.º 37-2.º) um valor b, tal que $e^b = a$, e só um, visto que a valores deseguaes de y correspondem valores deseguaes de x. Além d'isso, a $x = 0$ corresponde (n.º 44-II) $y = -\infty$, a $x = \infty$ corresponde $y = \infty$, e a $e^y > e^{y'}$ corresponde $y > y'$. De tudo isto resulta o theorema enunciado.

II. *Se x e x' representarem dois numeros positivos, temos*

$$\log (xx') = \log x + \log x',$$

$$\log \frac{x}{x'} = \log x - \log x',$$

$$\log x^m = m \log x.$$

As demonstrações das duas primeiras egualdades e a da terceira, quando m é um numero racional, são bem conhecidas desde os Elementos d'Algebra.

Se m é um numero irracional e $m_1, m_2, \ldots, m_t, \ldots$ são os numeros racionaes, inferiores a m, que entram na sua definição, temos

$$\log x^{m_t} = m_t \log x,$$

e portanto

$$x^{m_t} = e^{m_t \log x},$$

e, no limite,

$$x^m = e^{m \log x}.$$

Logo

$$\log x^m = m \log x.$$

III. *A funcção $\log x$ é continua, quando a variavel x é positiva e differente de 0. No ponto 0 a funcção $\log x$ é infinita.*

Esta proposição resulta da egualdade

$$\log (x + h) - \log x = \log \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

cujo ultimo membro tende (n.º 45) para 0, quando h tende para 0.

IV. Temos, pondo $x = a^y$ e representando por $\log_a x$ o logarithmo de x na base a,

$$\log_a x = y, \quad \log x = y \log a,$$

e portanto

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Passa-se pois do logarithmo neperiano de x para o logarithmo de x na base a, dividindo o logarithmo neperiano de x pelo logarithmo neperiano de a.

18. *Logarithmos imaginarios.* — Consideremos agora a funcção u determinada pela equação

$$z = e^u,$$

onde z e u representam quantidades reaes ou imaginarias.

Suppondo

$$z = x + iy = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega), \quad u = \alpha + i\beta,$$

temos a equação

$$\rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

que dá

$$\rho\cos\omega = e^{\alpha}\cos\beta, \quad \rho \operatorname{sen}\omega = e^{\alpha}\operatorname{sen}\beta,$$

d'onde se tira, por serem α e β reaes,

$$e^{2\alpha} = \rho^2, \quad \cos\omega = \cos\beta, \quad \operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\beta,$$

ou

$$\alpha = \log\rho, \quad \beta = \omega + 2k\pi,$$

onde é $\omega < 2\pi$ e k egual a zero ou a um numero inteiro, positivo ou negativo, qualquer.

Temos pois

$$(a) \qquad u = \log((z)) = \log\rho + i(\omega + 2k\pi),$$

empregando, como Cauchy, o signal $\log((N))$ para designar todos os logarithmos de N e o signal $\log N$ para designar o logarithmo real.

O valor de ρ que entra nesta egualdade é dado pela fórmula

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2},$$

e o valor de ω é dado, sem ambiguidade, por duas quaesquer das fórmulas

$$\omega = \text{arc sen}\,\frac{y}{\rho}, \quad \omega = \text{arc cos}\,\frac{x}{\rho}, \quad \omega = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

I. Se z for um numero real positivo, é $\omega = 0$, e vê-se pela fórmula precedente que o logarithmo de z tem um valor real, correspondente a $k = 0$, e um numero infinito de valores imaginarios, correspondentes aos outros valores de k. Em todos os outros casos o logarithmo de z tem um numero infinito de valores imaginarios, e não tem valor real.

Cada uma das expressões que se obtêem para u, dando a k um valor determinado, é um *ramo* da funcção $\log((z))$. Cada ramo é uma funcção definida de z, a qual no ponto $z = 0$ se torna infinita. Quando z é um numero real positivo, a funcção tem um ramo real e um numero infinito de ramos imaginarios; nos outros casos só tem ramos imaginarios.

II. A egualdade fundamental

$$\log((z)) + \log((z')) = \log((zz'))$$

tem logar para todos os valores do logarithmo, como se póde ver pelo mesmo processo que no caso das variaveis reaes. Os logarithmos que entram nos dois membros d'esta egualdade podem todavia corresponder a valores differentes de k.

III. *Cada um dos ramos da funcção* $\log((z))$ *é uma funcção continua de z, excepto no ponto* $z = 0$.

Com effeito, temos, para cada ramo,

$$\log(z + h + il) - \log z = \frac{1}{2}\log\frac{(x+h)^2 + (y+l)^2}{x^2 + y^2}$$
$$+ i\left(\text{arc tang}\,\frac{y+l}{x+h} - \text{arc tang}\,\frac{y}{x}\right).$$

Quando h e l tendem para zero, temos

$$\lim_{h,\,l=0} \log\frac{(x+h)^2 + (y+l)^2}{x^2 + y^2} = 0,$$

e, dando a h e l valores tão pequenos que $x+h$ tenha o signal de x e $y+l$ tenha o signal de y,

$$\lim_{h,\, l=0} \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{y+l}{x+h} - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} \right)$$

$$= \lim_{h,\, l=0} \operatorname{arc\,tang} \frac{lx - hy}{x(x+h) + y(y+l)} = 0,$$

visto que os dois arcos que entram no primeiro membro d'esta fórmula estão comprehendidos no mesmo quadrante.

Temos pois

$$\lim_{h,\, l=0} \log(z + h + il) = \log z,$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

49. *Funcção x^a.* — Sejam x a a quantidades reaes e seja além d'isso x positiva. Se a é egual a um numero racional $\frac{m}{n}$, a funcção x^a é algebrica; se a é irracional, a funcção x^a é transcendente. Em ambos os casos temos a egualdade

$$x^a = e^{a \log x},$$

da qual se deduzem as seguintes propriedades do ramo d'esta funcção correspondente aos valores reaes de $\log x$:

I. *Quando x cresce desde 0 até ∞, x^a cresce desde 0 até ∞, se é $a > 0$, e decresce desde ∞ até 0, se é $a < 0$.*

Com effeito, quando x cresce desde 0 até ∞, $\log x$ cresce desde $-\infty$ até ∞, e portanto $e^{a \log x}$ cresce desde 0 até ∞, quando é $a > 0$, e decresce desde ∞ até 0, quando é $a < 0$.

II. *O producto de dois valores da funcção é dado pela fórmula*

$$x^a \cdot x'^a = (xx')^a.$$

Temos, com effeito,

$$x^a \cdot x'^a = e^{a \log x} \cdot e^{a \log x'} = e^{a \log (xx')} = (xx')^a.$$

III. *A funcção x^a é continua em qualquer dos pontos considerados, exceptuando o ponto $x = 0$ quando a é negativo. N'este ponto a funcção torna-se infinita.*

Viu-se, com effeito, no n.º 47 que, quando é $x > 0$, a funcção $\log x$ é continua; portanto tambem é continua (n.º 36-3.º) a funcção de funcção $e^{a \log x}$.

No ponto $x=0$ a funcção x^a é infinita, quando a negativa; quando porém a é positivo, $e^{a \log x}$ tende para 0, quando x tende para 0, e a funcção x^a é ainda continua.

50. *Funcção z^a.* — Estudemos agora a funcção z^a, onde z e a representam quantidades quaesquer, reaes ou imaginarias, e consideremos tanto os valores reaes como os valores imaginarios da funcção.

É conhecida desde o n.º 11-IV a significação de z^a, quando a representa um numero racional qualquer, e sabe-se que é

$$z^a = \rho^a [\cos a (\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} a (\theta + 2k\pi)],$$

ρ e θ representando o módulo e o argumento de z e k um inteiro qualquer, positivo ou negativo. No caso de a ser irracional toma-se esta egualdade para definição de z^a. A funcção z^a goza das propriedades seguintes:

I. Se a é racional e egual a $\frac{m}{n}$, a funcção z^a tem n ramos (n.º 11-IV), que correspondem a $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Se a é irracional, a funcção tem um numero infinito de ramos. Se z é real e egual ao numero positivo x, é $\theta=0$; e z^a tem *um ramo real positivo,* correspondente a $k=0$, que foi estudado no numero anterior, e, no caso de a ser uma fracção irreductivel $\frac{m}{n}$ de denominador par, tem ainda *um ramo real negativo,* correspondente a $k=\frac{n}{2}$.

II. Por ser (n.^{os} 46 e 48)

$$e^{a \log((z))} = e^{a[\log \rho + (\theta + 2k\pi) i]}$$
$$= \rho^a [\cos a (\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} a (\theta + 2k\pi)],$$

temos a relação

$$z^a = e^{a \log((z))},$$

que póde servir para definir z^a, quando a é imaginario.

III. Das egualdades

$$z^a = e^{a \log((z))}, \quad z'^a = e^{a \log((z'))}$$

tira-se a seguinte:

$$z^a . z'^a = (zz')^a.$$

*

Os valores das potencias, que entram nos dois membros d'esta egualdade, podem corresponder a valores differentes de k.

IV. Vê-se, como no caso das variaveis reaes, que cada ramo da funcção z^a é uma funcção continua de z, exceptuando o ponto $z=0$ quando a parte real de a é negativa.

51. *Funcção a^z.* — A funcção exponencional a^z foi já estudada no caso de a ser positivo e z real e no caso de ser $a=e$ e z imaginario. No caso geral temos (¹)

$$a^z = e^{z \log a},$$

$\log a$ representando o ramo de $\log((a))$ correspondente a um valor particular qualquer, dado a k; e esta egualdade faz ver que é

$$a^z \,.\, a^{z'} = a^{z+z'},$$

e que a funcção considerada é continua.

52. *Funcções circulares.* — As funcções circulares $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ foram estudadas na Trigonometria, onde apparecem como auxiliares para a resolução dos triangulos (²).

I. As suas propriedades fundamentaes são, no caso dos arcos reaes, as seguintes:

1.ª Sendo a e b dois arcos reaes, temos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

É o *theorema de addição* das funcções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

2.ª As funcções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são *periodicas*, isto é, tomam o mesmo valor cada vez que o arco augmenta de 2π. Quando o arco augmenta de π, tomam o mesmo valor absoluto, mas mudam de signal

3.ª Entre as funcções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ existe a relação

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(¹) Sobre o caso em que $a=1$, o qual tem algum interesse, póde ver-se um artigo publicado no tom. II das nossas *Obras sobre Mathematica*.

(²) A theoria das razões trigonometricas foi a principio um capitulo da *Geometria elementar*. Foram João Bernoulli e Euler os fundadores da theoria analytica d'estas quantidades, por meio da qual se reduziu o calculo trigonometrico ao calculo logarithmico e exponencial.

II. As fórmulas do n.º 46:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

dão as expressões seguintes das funcções seno e coseno:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

por meio dos quaes Euler reduziu o calculo trigonometrico ao calculo exponencial.

III. Estas relações levam a introduzir na Analyse os *senos* e *cosenos* de arcos imaginarios. Representam-se, com effeito, pelas notações $\operatorname{sen}(x+iy)$ e $\cos(x+iy)$ as funcções que resultam de substituir nas fórmulas precedentes x por $x+iy$, a saber:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2},$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}.$$

A primeira d'estas fórmulas dá

$$\cos(z+z') = \frac{e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}}{2} = \frac{e^{iz}e^{iz'} + e^{-iz}e^{-iz'}}{2}$$

$$= \frac{(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iz'}+e^{-iz'}) + (e^{iz}-e^{-iz})(e^{iz'}-e^{-iz'})}{4}$$

ou

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'.$$

Do mesmo modo a segunda dá

$$\operatorname{sen}(z+z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z'.$$

Vê-se pois que os *senos* e os *cosenos* de arcos imaginarios gozam da propriedade expressa pelo *theorema de addição.*

Das fórmulas que servem de definição a $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ tira-se tambem facilmente a egualdade

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1.$$

IV. Seja k um numero inteiro positivo. Desenvolvendo a potencia de grau k dos binomios que entram nos primeiros membros das egualdades

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)^k = (e^{iz})^k = e^{ikz} = \cos kz + i \operatorname{sen} kz,$$

$$(\cos z - i \operatorname{sen} z)^k = \cos kz - i \operatorname{sen} kz,$$

e sommando e subtraindo as egualdades resultantes, membro a membro, obtêem se as fórmulas seguintes, dadas por João Bernoulli em 1701 nas *Acta eruditorum:*

$$\operatorname{sen} kz = k \cos^{k-1} z \operatorname{sen} z - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \cos^{k-3} z \operatorname{sen}^3 z$$

$$+ \frac{k(k-1)\ldots(k-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{k-5} \operatorname{sen}^5 z - \ldots,$$

$$\cos kz = \cos^k z - \frac{k(k-1)}{1.2} \cos^{k-2} z \operatorname{sen}^2 z$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4} \cos^{k-4} z \operatorname{sen}^4 z - \ldots$$

V. Pondo $x = 0$ nas expressões de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, vem

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad \operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}.$$

As funcções $-i \operatorname{sen}(iy)$ e $\cos(iy)$ têem o nome de *seno hyperbolico* e de *coseno hyperbolico* de y.

VI. Por ser a exponencial uma funcção continua, qualquer que seja z, e por serem $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ sommas d'exponenciaes, podemos enunciar o theorema seguinte:

As funcções $\operatorname{sen} z$ *e* $\cos z$ *são continuas, qualquer que seja* z.

VII. A funcção $\operatorname{sen} z$ é nulla nos pontos que satisfazem á equação

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0,$$

ou

$$e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x) = 0,$$

ou

$$\cos x (e^{-y} - e^y) + i \operatorname{sen} x (e^{-y} + e^y) = 0,$$

que, por ser a expressão $e^{-y}+e^{y}$ sempre positiva, dá $\operatorname{sen} x=0$, $e^{-y}=e^{y}$, e portanto $y=0$, $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

Vê-se pois que a *funcção* sen z *só é nulla nas pontos* $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

Do mesmo modo se vê que *a funcção* cos z *só é nulla nos pontos* $z=\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$

VIII. A tangente de z, a cotangente de z, etc. são, quer z seja real quer seja imaginario, definidas pelas relações

$$\operatorname{tang} z=\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotang} z=\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \text{ etc.},$$

e vê-se que a primeira é continua, excepto nos pontos que satisfazem á condição $\cos z=0$, que a segunda é continua, excepto nos pontos que satisfazem á condição $\operatorname{sen} z=0$, etc.

53. *Funcções circulares inversas.* — Suppondo que na relação

$$\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}=\cos u=z$$

se conhece $\cos u$, isto é, z, podemos achar u, isto é, arc cos z.

A equação precedente dá, com effeito,

$$e^{2iu}-2z\,e^{iu}+1=0;$$

logo será

$$e^{iu}=z\pm\sqrt{z^2-1},$$

d'onde se deduz

$$u=\operatorname{arc}\cos z=\frac{1}{i}\log\left(\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)\right),$$

onde se deve substituir o logarithmo neperiano pela sua expressão achado no n.º 48.

Esta fórmula dá todos os valores do arc cos z e mostra que esta funcção tem um numero infinito de ramos (n.º 48).

Baseando-se em que toda a funcção de outra funcção continua é tambem continua e em que não existe valor algum de z que annulle $z\pm\sqrt{z^2-1}$, vê-se que os ramos da funcção arc cos z são funcções continuas de z, qualquer que seja z.

Do mesmo modo se acham as fórmulas

$$\text{arc sen}\, z = \frac{1}{i} \log ((iz \pm \sqrt{1 - z^2})),$$

$$\text{arc tang}\, z = \frac{1}{2i} \log \left(\left(\frac{i - z}{i + z} \right) \right).$$

Cada uma das funcções precedentes tem um numero infinito de ramos. Os ramos da primeira são funcções continuas de *z*, qualquer que seja *z*; os da segunda são funcções continuas de *z*, excepto nos pontos *i* e $-i$ onde se tornam infinitos.

A descoberta da ultima fórmula, feita por João Bernoulli, foi o primeiro passo para a reducção do calculo trigonometrico ao calculo logarithmico e exponencial.

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

Noções preliminares

I

Noção de infinitamente pequeno e de derivada

54. Chama-se *quantidade infinitamente pequena toda a quantidade variavel que tende para o limite zero.*

Sejam α uma quantidade infinitamente pequena e β uma quantidade ligada com α de tal modo que, quando α tende para o limite zero, β tenda tambem para este limite. Se, n'este caso, $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tende tambem para zero, diz-se que β *é infinitamente pequeno de ordem superior a n relativamente a* α. Se porém $\frac{\beta}{\alpha^n}$ tende para um limite determinado A, differente de zero, diz-se que β *é infinitamente pequeno de ordem n relativamente a* α. N'este ultimo caso podemos escrever

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = A + \varepsilon,$$

onde a quantidade ε é infinitamente pequena ao mesmo tempo que α.

D'esta definição resultam immediatamente as consequencias seguintes:

1.º *Se duas quantidades infinitamente pequenas* β *e* β' *forem respectivamente da ordem* n *e* m *relativamente a* α, *o seu producto será da ordem* $n+m$ *e o seu quociente da ordem* $n-m$.

Com effeito, das equações de definição

$$\beta = \alpha^n (A + \varepsilon), \quad \beta' = \alpha^m (B + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta\beta'}{\alpha^{n+m}} = AB, \quad \lim \frac{\beta}{\beta' \alpha^{n-m}} = \frac{A}{B}.$$

2.º *Se uma quantidade infinitamente pequena* β' *for da ordem* m *relativamente a* β, *e esta da ordem* n *relativamente a* α, *a primeira será da ordem* $n \times m$ *relativamente a* α.

Com effeito, das equações de definição

$$\beta' = \beta^m (A + \varepsilon), \quad \beta = \alpha^n (B + \varepsilon')$$

deduz-se

$$\lim \frac{\beta'}{\alpha^{nm}} = AB^m.$$

Exemplo 1.º — Quando um arco é infinitamente pequeno, o seu seno é um infinitamente pequeno de primeira ordem relativamente ao arco. Com effeito, sabe-se pela Trigonometria que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tende para a unidade, quando x tende para o limite zero.

Exemplo 2.º — No triangulo rectangulo ABC a differença entre a hypothenusa BC e o catheto AC é infinitamente pequena de segunda ordem relativamente ao angulo BCA.

Com effeito, chamando α o angulo BCA, temos

$$CB - AC = CB(1 - \cos\alpha) = 2CB \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha,$$

e portanto, fazendo tender α para zero,

$$\lim \frac{CB - AC}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \lim \frac{CB \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha}{\left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2} = \frac{1}{2} CB.$$

Deu-se no n.º 36 a definição de *continuidade* das funcções. A este respeito observaremos aqui que, empregando a linguagem infinitesimal, se póde dizer que $f(x)$ *é uma funcção continua de* x, *no ponto* a, *quando a differença* $f(a+h) - f(a)$ *é infinitamente pequena ao mesmo tempo que* h.

53. Seja $f(x)$ uma funcção da variavel real x, definida na visinhança de cada ponto. Se,

quando h tende para zero, a fracção

$$(1) \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tende para um limite *determinado* $f'(x)$, qualquer que seja a serie dos valores successivos pelos quaes passa h, quando tende para zero, a este limite dá-se o nome de *derivada* da funcção $f(x)$ no ponto x.

Se em alguns pontos a fracção (1) tende para o infinito, diz-se que a derivada é *infinita* n'estes pontos e *finita* nos outros.

Se em alguns pontos a mesma fracção não tende para um limite determinado, a funcção n'estes pontos não tem derivada. No que segue, quando dissermos que uma funcção tem derivada sem especificar os pontos em que isto tem logar, deve entender-se que a funcção tem derivada em todos os pontos em que é determinada.

É facil de ver que, no caso de $f(x)$ ser uma funcção algebrica inteira, a definição de derivada que vimos de dar, concorda com a definição dada na *Introducção* (n.º 41-I).

Com effeito, a fórmula de Taylor dá n'este caso

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x),$$

e portanto

$$\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Da definição de derivada deduz-se immediatamente o seguinte principio:

Toda a funcção que tem derivada, é continua nos pontos em que a derivada não é infinita.

Com effeito, da egualdade

$$\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

deduz-se

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

representando por ε uma quantidade infinitamente pequena com h.

Temos pois a egualdade

$$f(x+h)-f(x)=h\,[f'(x)+\varepsilon],$$

a qual mostra que a differença $f(x+h)-f(x)$ é infinitamente pequena ao mesmo tempo que h, quando a funcção $f'(x)$ é finita.

*

Por muito tempo se julgou que toda a funcção continua em um intervallo dado tinha nos pontos d'este intervallo, exceptuando um numero limitado d'elles, uma derivada finita. Hoje sabe-se que isto é falso e conhecem-se muitas funcções, continuas em todos os pontos de um intervallo, que não admittem derivada em ponto algum d'este intervallo. Adiante será dado um exemplo notavel d'estas funcções singulares. As funcções consideradas na *Introducção* têem todas derivada. Veremos isso adiante, assim como veremos que o ramo da *Analyse* que vamos estudar, dá origem a um numero infinito de novas funcções que satisfazem á mesma condição.

56. Considerámos no paragrapho anterior a derivada como limite da razão das quantidades infinitamente pequenas $f(x+h)-f(x)$ e h. Introduzindo a noção de *differencial,* póde exprimir-se a derivada pela razão de dois infinitamente pequenos, como vamos ver.

Temos

$$f(x+h)-f(x)=h\left[f'(x)+\varepsilon\right],$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h. A differença $f(x+h-f(x)$ compõe se pois de duas parcellas infinitamente pequenas, a primeira proporcional a h e a segunda infinitamente pequena relativamente á primeira. A parcella proporcional a h chama-se *differencial da funcção* $f(x)$ e representa-se por $df(x)$ ou por dy [pondo $y=f(x)$]. Para conformidade de notação, representa-se por dx o infinitamento pequeno arbitrario h. Temos pois

$$dy=f'(x)\,dx,$$

onde *dx é o augmento arbitrario da variavel independente x e dy é a parte proporcional a dx do augmento correspondente da funcção $f(x)$. A derivada $f'(x)$ é o quociente de dy por dx.*

Das duas egualdades precedentes tira-se a relação

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{dy}=1$$

entre o augmento da funcção $f(x)$ e a sua differencial.

57. Em todo este livro empregaremos, para representar as derivadas, umas vezes a notação y' ou $f'(x)$ (notação de Lagrange), outras vezes a notação $\frac{dy}{dx}$ (notação de Leibnitz).

A funcção $f'(x)$ póde ter tambem uma derivada, que se representa por $f''(x)$, etc. Estas derivadas $f''(x)$, $f'''(x)$, etc. têem respectivamente os nomes de derivada de *segunda ordem,* de *terceira ordem,* etc. da funcção $f(x)$. Podem tambem ser representadas pelas notações $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., por motivo que adiante veremos.

Foi por considerações geometricas que se chegou á noção importante de derivada. Vamos por isso entrar por um pouco no campo da Geometria, para se poder ver a origem d'esta noção e apreciar assim a sua importancia.

II

Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do calculo infinitesimal

58. Dá-se, como se sabe, o nome de *methodo dos limites* ao modo de determinar quantidades, considerando-as como limites d'outras quantidades conhecidas. Viu-se já na *Geometria Elementar* a importancia consideravel d'este methodo, por meio do qual se resolveram certas questões relativas ao circulo, ao cylindro, ao cóne e á esphera. Aqui vamos fazer ainda duas applicações, importantes para o nosso fim.

I. Consideremos uma recta MM', que corte uma curva em dois pontos, e supponhamos que, quando o segundo ponto M' tende para o limite M ([1]), a recta tende para um limite MT', e que este limite é unico, qualquer que seja a serie de pontos pelos quaes passe M', quando se approxima de M. A esta recta MT' chama-se *tangente* á curva no ponto M.

Se forem $y=f(x)$ a equação da curva, referida a eixos rectangulares, (x, y) e $(x+h, y+k)$ as coordenadas dos pontos M e M', θ e α as inclinações T'ML e M'ML da tangente e da secante sobre o eixo das abscissas, a resolução do triangulo rectangulo LMM' dará a egualdade

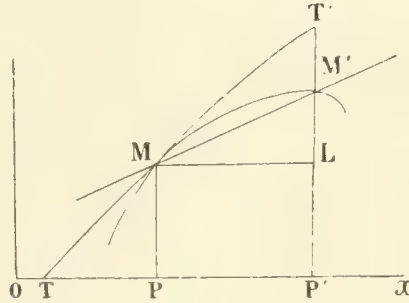
$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\text{M'L}}{\text{ML}}=\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

por meio da qual se determina a inclinação da secante sobre o eixo das abscissas, substituindo $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva.

Mas, quando o ponto M' tende para M, h tende para zero; logo temos a egualdade

$$\operatorname{tang}\theta=\lim\frac{k}{h}=\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

([1]) Diz-se que uma recta fixa é o limite para que tende uma recta variavel, se o angulo das duas rectas tende para zero; e que um ponto fixo é o limite para que tende um ponto variavel, se a distancia dos dois pontos tende para zero.

por meio da qual se determina a direcção θ da tangente, substituindo $\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva.

No caso, por exemplo, de ser $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ou $x^2 + y^2 = R^2$, teremos, mudando x em $x + h$ e y em $y + k$,

$$x^2 + 2xh + h^2 + y^2 + 2yk + k^2 = R^2,$$

ou

$$(2y + k)k + (2x + h)h = 0,$$

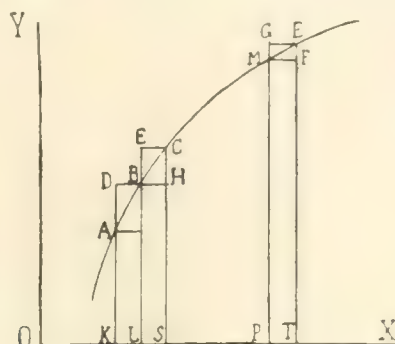
e portanto

$$\text{tang}\,\theta = \lim \frac{k}{h} = -\lim \frac{2x + h}{2y + k} = -\frac{x}{y}.$$

Temos assim o coefficiente angular da tangente á circumferencia no ponto (x, y).

Foi Descartes quem primeiro considerou as tangentes como limite das posições das secantes, e foi tambem este grande geometra quem deu pela primeira vez um methodo geral para as achar, o qual foi publicado em 1637 na sua celebre *Geometria*. Outros methodos foram depois empregados, para resolver a mesma questão, por Fermat, Roberval, Sluse, etc. O *methodo de tangentes* que vimos de expôr, é o de Fermat, com a fórma simples que lhe deu Barrow nas suas *Lectiones geometricae*, publicadas em 1679.

II. O segmento plano AMPK, comprehendido entre uma curva AM, cuja equação é $y = f(x)$, $f(x)$ representando uma funcção continua, o eixo das abscissas e duas ordenadas AK e MP, correspondentes ás abscissas x_0 e X, póde ser decomposto n'outros por meio de

rectas parallelas ao eixo das ordenadas, que passem por $n-1$ pontos, comprehendidos entre K e P, cujas abscissas representaremos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

O segmento ABLK está comprehendido entre dois rectangulos cuja base é KL, cujas alturas são eguaes a AK e DK, e cujas áreas são portanto eguaes a $h_1 f(x_0)$ e $h_1 f(x_1)$, h_1 representando o comprimento de KL; o segmento BCSL está comprehendido entre os rectangulos BHSL e ECSL, cujas áreas são eguaes a $h_2 f(x_1)$ e $h_2 f(x_2)$, h_2 representando o comprimento de LS; etc. Logo o segmento considerado AMPK está comprehendido entre dois segmentos planos, cujas áreas são eguaes a

$$\text{(A)} \qquad h_1 f(x_0) + h_2 f(x_1) + \ldots + h_n f(x_{n-1})$$

e

$$\text{(B)} \qquad h_1 f(x_1) + h_2 f(x_2) + \ldots + h_n f(\mathrm{X}).$$

Posto isto, chama-se *área* do segmento considerado o limite para que tendem estas sommas, quando as quantidades $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$ tendem todas para zero. Admittimos por agora, como postulado, que as sommas precedentes tendem para um limite commum, e que este limite tem um valor unico, qualquer que seja o modo como se façam as divisões successivas de KP em partes cada vez menores (questão de que adiante nos occuparemos).

A consideração das áreas planas como limites de sommas de outras áreas infinitamente pequenas, que podem ser rectangulares, como precedentemente se suppoz, ou ter outras fórmas, está contida implicitamente na demonstração por *exaustão,* dada por Archimedes, o maior geometra da antiguidade, da expressão da área da espiral conhecida pelo seu nome. No seculo XVII foi este modo de considerar as referidas áreas explicitamente empregado, com o nome de *methodo dos indivisiveis*, por alguns dos mais eminentes geometras d'esse tempo, como Cavalieri e Torricelli, na Italia, Huygens, na Hollanda, Pascal, Fermat e Roberval, na França, Wallis, na Inglaterra, G. de Saint-Vincent e Sluse, na Belgica, etc., os quaes obtiveram assim o valor das áreas limitadas por algumas curvas importantes.

Exemplo 1.º — Se a curva dada for a parabola de ordem m, cuja equação é $y = ax^m$, m

presentando um numero inteiro positivo, e se quizermos achar a área do segmento plano limitado por esta curva, pelo eixo das abscissas e pela ordenada correspondente á abscissa X, temos, dando a $h_1, h_2, \ldots, h_n$ um mesmo valor h, e portanto a $x_0, x_1, x_2, \ldots, X$ os valores $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, ..., $X = nh$, e considerando-se S como limite da somma (B),

$$S = \lim_{h=0} ah^{m+1}(1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m),$$

$$= aX^{m+1} \lim \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}};$$

mas, em virtude de um theorema d'Algebra, do qual se dará adiante uma demonstração, temos

$$\lim \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1};$$

logo

$$S = a\frac{X^{m+1}}{m+1}.$$

Este resultado foi descoberto por Cavalieri, e depois por Fermat e Wallis. O caso particular de ser $m = 2$ tinha sido considerado na antiguidade por Archimedes.

Se a curva dada for representada pela equação

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

acha-se do mesmo modo, suppondo que a ordenada y é positiva no intervallo de $x = 0$ a $x = X$,

$$S = a_0 X + a_1 \frac{X^2}{2} + \ldots + a_m \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

Este resultado suggeriu a Wallis a ideia de empregar as series para o calculo approximado das áreas planas, representando primeiramente as ordenadas da curva por uma serie ordenada segundo as potencias das abscissas, e levou assim Newton e outros geometras da mesma epocha a procurarem, como já dissemos, a representação por series das principaes funcções conhecidas n'esse tempo.

Obtem-se, como é facil de ver, o mesmo resultado, considerando S como limite da somma (A).

Exemplo 2.° — Consideremos agora a hyperbole cuja equação é $xy = a^2$, e procuremos o valor da área S, limitada por esta curva, pelo eixo das abscissas e por duas parallelas ao eixo das ordenadas, tiradas pelos pontos cujas abscissas são eguaes a x_0 e X.

Pondo, como Fermat,

$$x_1 = x_0(1+\varepsilon),\ x_2 = x_0(1+\varepsilon)^2,\ \ldots,\ x_{n-1} = x_0(1+a)^{n-1},$$

ε sendo uma quantidade tal que

$$\text{(C)} \qquad x_0(1+\varepsilon)^n = \text{X},$$

o que dá

$$h_1 = \varepsilon x_0,\ h_2 = (1+\varepsilon)\varepsilon x_0,\ \ldots,\ h_n = (1+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon x_0,$$

e, considerando S como limite da somma (A), temos

$$\text{S} = a^2 \lim_{n=\infty} n\varepsilon.$$

Póde-se ver agora, ou por meio da theoria arithmetica dos logarithmos, como os geometras que primeiro estudaram esta questão, ou por meio da sua theoria algebrica, que vamos empregar, que S é exprimivel por um logarithmo.

Com effeito, a equação (C) mostra que ε tende para 0, quando n tende para ∞, e dá

$$n = \frac{\log \text{X} - \log x_0}{\log(1+\varepsilon)};$$

portanto temos, pondo $\varepsilon = \frac{1}{m}$,

$$\text{S} = a^2 \log \frac{\text{X}}{x_0} \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{\log(1+\varepsilon)} = a^2 \log \frac{\text{X}}{x_0} \lim_{m=\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m},$$

ou, tomando para base dos logarithmos considerados o numero *e*, definido no n.º 45,

$$\text{S} = a^2 \log \frac{\text{X}}{x_0}.$$

Este resultado explica o motivo porque a determinação da área da hyperbole levou a considerar os logarithmos de base *e*, e o motivo porque a estes logarithmos se deu a designação de *hyperbolicos* [1].

---

[1] Foi G. de Saint-Vincent quem primeiro se occupou da determinação da área da hyperbole e foram os resultados a que chegou, que levaram diversos geometras a descobrir a expressão d'esta área por logarithmos.

O

III. Representemos por S e δ as áreas de AKPM e MPTE e por X e h os segmentos OP e PT. A área δ está evidentemente comprehendida entre as áreas dos rectangulos MPTF e GPTE, e temos portanto a desegualdade

$$hf(X) < \delta < hf(X+h),$$

que, por tender $f(X+h)$ para $f(X)$, quando h tende para 0, dá

$$\lim \frac{\delta}{h} = f(X),$$

ou, por ser δ o augmento da área S correspondente ao augmento h de X,

$$\frac{dS}{dX} = f(X).$$

Esta expressão da derivada da área S relativamente a X foi descoberta por Newton e Leibnitz.

59. O methodo dos limites, quando se determinam as quantidades considerando-as como limites de razões ou limites de sommas de quantidades infinitamente pequenas, toma o nome de methodo infinitesimal. Os dois principios seguintes facilitam a applicação do methodo infinitesimal a muitas questões:

1.º *Se se quizer achar o limite para que tende a razão* $\frac{\alpha'}{\alpha}$ *de duas quantidades infinitamente pequenas* α' *e* α, *e se as quantidades infinitamente pequenas* β' *e* β *estiverem ligadas com* α' *e* α *de modo que seja*

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \quad \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

podemos substituir α' *por* β' *e* α *por* β, *e temos*

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

Com effeito, temos por hypothese

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \varepsilon', \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon,$$

onde ε' e ε são quantidades infinitamente pequenas ao mesmo tempo que α' e α. Logo será

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'(1+\varepsilon')}{\beta(1+\varepsilon)},$$

e portanto

$$\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\beta}.$$

2.º *Se as quantidades α, α', ..., $\alpha^{(n)}$ tenderem para zero, quando n tende para o infinito, e se quizer achar o limite para que tende n'este caso a somma d'estas quantidades, e se as quantidades positivas β, β', ..., $\beta^{(n)}$ estiverem ligadas com α, α', α'', etc. de tal modo que seja*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha}{\beta} = 1, \ \lim_{n=\infty} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1, \ \lim_{n=\infty} \frac{\alpha''}{\beta''} = 1, \text{ etc.},$$

podemos substituir α por β, α' por β', etc., e vem

$$\lim(\alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n)}) = \lim(\beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)}).$$

Com effeito, temos

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \varepsilon, \ \frac{\alpha'}{\beta'} = 1 + \varepsilon', \ \frac{\alpha''}{\beta''} = 1 + \varepsilon'', \text{ etc.},$$

e portanto

$$\alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n)} = \beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)} + \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \ldots + \beta^{(n)}\varepsilon^{(n)}.$$

Mas, suppondo que ε é aquella das quantidades infinitamente pequenas ε, ε', ε'', etc. que tem maior valor absoluto, temos (n.º 11-I) a desegualdade

$$\beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \ldots + \beta^{(n)}\varepsilon^{(n)} \overline{<} \varepsilon(\beta + \beta' + \ldots + \beta^{(n)}),$$

que, quando $\beta + \beta' + \ldots$ tende para um limite determinado e ε tende para zero, dá

$$\lim(\beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \ldots + \beta^{(n)}\varepsilon^{(n)}) = 0.$$

Logo é

$$\lim(\alpha + \alpha' + \ldots) = \lim(\beta + \beta' + \ldots).$$

O primeiro dos principios precedentes tem applicação nas questões da natureza do problema I do paragrapho precedente, em que uma quantidade é determinada pelo limite da razão de dois

*

infinitamente pequenos. O segundo tem applicação nas questões da natureza do problema II do mesmo paragrapho, em que uma quantidade é determinada pelo limite de uma somma de infinitamente pequenos. Em virtude d'estes principios podemos substituir os infinitamente pequenos que entrem n'uma questão, por outros que a simplifiquem.

60. Para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza do problema I do n.º 58, é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite para que tende $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, quando h tende para 0. Somos assim levados pela questão importante da determinação das tangentes ás curvas a considerar *o problema de calculo que tem por fim achar as derivadas das funcções*. Este problema é o objecto do *Calculo differencial*.

Em segundo logar, para applicar o methodo infinitesimal ás questões da natureza do problema II do n.º 58, é necessario procurar, para as diversas funcções, o limite para que tendem as sommas (A) ou (B), quando h_1, h_2, ..., h_n tendem para zero. Somos assim levados a outro problema de Analyse: *determinar a funcção que é o limite das sommas consideradas*.

Vimos no n.º 58-III que, se a funcção $f(x)$ é continua, o limite para que tende S, quando h tende para zero, é uma funcção de X, cuja derivada é egual a $f(\mathrm{X})$. O estudo da questão anterior leva pois a considerar *o problema que tem por fim achar as funcções, quando se conhecem as suas respectivas derivadas*. Este problema é o objecto do *Calculo integral*.

O *Calculo differencial* e o *Calculo integral* constituem a *Analyse infinitesimal*, cuja descoberta é devida a Newton e a Leibnitz. A determinação das tangentes ás curvas e a quadratura das áreas planas foram as duas questões que principalmente levaram estes dois celebres geometras a esta grande descoberta.

Investigações historicas, que aqui não podemos indicar [1], levaram á conclusão de que Newton inventou a *Analyse infinitesimal* antes de 1666; todavia este grande homem, que junctava ao mais sublime dos genios a mais extraordinaria modestia, só tarde, cedendo a instancias dos amigos, se resolveu a publica-la. Esta publicação foi feita pela primeira vez em 1687 na sua obra immortal: *Principia mathematica philosophiae naturalis,* o monumento mais grandioso da sciencia humana, depois em um appendice á sua *Optica,* publicado em 1704, intitulado *De quadratura curvarum,* mais tarde, em 1711, na obra *Analysis per series, fluctiones etc.*, e finalmente, com maior desenvolvimento, em um trabalho intitulado *Methodus fluxionum et serierum etc.,* o qual appareceu em 1736, depois da sua morte. Antes da primeira publicação da descoberta de Newton, foi a *Analyse infinitesimal* reinventada por Leibnitz, que publicou a sua descoberta em um artigo celebre, impresso em 1684 nas *Acta eruditorum,* o qual tem por titulo *Nova methodus pro maximis et minibus... et singulare pro illis calculi genus.*

---

[1] Para um estudo desenvolvido da historia da fundação da Analyse infinitesimal consulte-se a obra magistral de M. Cantor intitulada *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

O methodo empregado pelos dois grandes geometras para tratar a questão é identico na sua essencia, mas differente na fórma, mais geometrica e rigorosa na exposição de Newton, mais subjectiva na exposição de Leibnitz.

O novo ramo da *Analyse* a que a descoberta de Newton e Leibnitz deu origem, foi immediatamente cultivado pelos dois irmãos João Bernoulli e Jacob Bernoulli, e depois por Euler e Lagrange, os dois maiores geometras do seu tempo, os quaes completaram a sua fundação. Outros analystas eminentes continuaram depois a obra que os grandes geometras que vimos de mencionar iniciaram, desenvolvendo e completando uns capitulos, junctando outros, transformando alguns em novos ramos, aperfeiçoando as condições para a applicação de alguns theoremas primitivamente enunciados de um modo vago, descobrindo novas applicações, etc., como se verá em diversos logares d'esta obra.

As primeiras obras em que a *Analyse infinitesimal* foi systematicamente exposta, foram o *Traité des infiniments petits* de L'Hospital, publicada em 1696, fructo das lições que a este geometra deu João Bernoulli, a continuação d'aquelle tratado por este ultimo, e o *Treatrise on Fluxions* de Maclaurin, publicado em 1742. A estes primeiros ensaios seguiram-se as *Institutiones calculi differencialis* e as *Institutiones calculi integralis* de Euler, publicadas no intervallo de 1755 a 1770, onde aquella analyse foi apresentada pela primeira vez debaixo de fórma completa.

CAPITULO II

Derivadas de primeira ordem das funcções reaes de variaveis reaes

I

Theoremas geraes

61 I. Seja y uma funcção de x definida pela egualdade

$$y = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \pm \ldots \pm \varphi_n(x),$$

e procuremos a derivada d'esta funcção relativamente a x, suppondo que $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc. admittem derivadas finitas no ponto x.

Mudando x em $x + h$ e chamando k, l_1, l_2, ..., l_n os augmentos correspondentes de y, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, etc., teremos

$$k = l_1 \pm l_2 \pm \ldots \pm l_n.$$

d'onde se deduz, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \lim \frac{l_1}{h} \pm \lim \frac{l_2}{h} \pm \ldots$$

ou

$$y' = \varphi_1'(x) \pm \varphi_2'(x) \pm \ldots \pm \varphi_n'(x).$$

Logo *a derivada de uma somma algebrica de funcções é egual á somma algebrica das derivadas das parcellas.*

II. Procuremos a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x)$$

de duas funcções dadas, que admittam derivadas finitas no ponto x.

Mudando x em $x+h$ e chamando k, l_1, l_2 os augmentos correspondentes de y, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, vem

$$y + k = \varphi_1(x+h) \cdot \varphi_2(x+h) = [\varphi_1(x) + l_1][\varphi_2(x) + l_2].$$

Temos pois

$$k = l_1 \varphi_2(x) + l_2 \varphi_1(x) + l_1 \cdot l_2,$$

e portanto, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{k}{h} = \varphi_2(x) \lim \frac{l_1}{h} + \varphi_1(x) \lim \frac{l_2}{h},$$

ou

$$y' = \varphi_1'(x) \varphi_2(x) + \varphi_2'(x) \varphi_1(x).$$

Do mesmo modo se vê que a derivada do producto

$$y = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x)$$

é dada pela fórmula

$$y' = \varphi_1'(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x) + \varphi_1(x) \varphi_2'(x) \ldots \varphi_n(x) + \ldots + \varphi_1(x) \varphi_2(x) \ldots \varphi_n'(x);$$

e portanto *a derivada de um producto de funcções é egual á somma dos productos que se obtêem multiplicando a derivada de cada factor pelo producto de todos os outros.*

III. A derivada do quociente das mesmas funcções

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

obtem-se egualando os limites para que tendem os dois membros da identidade

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\varphi_1(x+h)}{\varphi_2(x+h)} - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\right] = \frac{1}{\varphi_2(x)\varphi_2(x+h)}\left[\varphi_2(x)\frac{\varphi_1(x+h) - \varphi_1(x)}{h}\right.$$

$$\left. - \varphi_1(x)\frac{\varphi_2(x+h) - \varphi_2(x)}{h}\right],$$

quando h tende para zero, o que dá

$$y' = \frac{\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)}.$$

Logo *a derivada de uma fracção é egual ao quociente que se obtem dividindo pelo quadrado do seu denominador a differença entre os productos da derivada do numerador pelo denominador e da derivada do denominador pelo numerador.*

IV. Seja y uma *funcção de funcção de* x determinada pelas equações

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x),$$

e procuremos a derivada de y relativamente a x, suppondo que $\varphi(x)$ admitte uma derivada finita no ponto x, e que $f(u)$ admitte uma derivada finita no ponto u correspondente. Chamando l e k os augmentos de u e de y, correspondentes ao augmento h de x, temos (n.º 56)

$$k = f(u+l) - f(u) = l\left(\frac{dy}{du} + \varepsilon\right),$$

$$l = \varphi(x+h) - \varphi(x) = h\left(\frac{du}{dx} + \varepsilon'\right),$$

onde ε e ε' representam quantidades infinitamente pequenas com h; e portanto

$$\frac{k}{h} = \left(\frac{dy}{du} + \varepsilon\right)\left(\frac{du}{dx} + \varepsilon'\right).$$

Egualando agora os limites para que tendem os dois membros d'esta identidade, quando h tende para 0, vem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

Temos pois o theorema seguinte:

Se y é funcção de u e u é funcção de x, a derivada de y relativamente a x é egual ao producto da derivada de y relativamente a u pela derivada de u relativamente a x.

V. Se resolvermos relativamente a x a equação $y = f(x)$, vem uma equação da fórma $x = \varphi(y)$, e a funcção $\varphi(y)$ chama-se *funcção inversa de* $f(x)$.

Supponhamos que as funcções $f(x)$ e $\varphi(y)$ têem um unico valor para cada valor de x e de y, que a funcção $f(x)$ é continua e que a funcção $\varphi(y)$ admitte uma derivada finita no

ponto y. Chamando k o augmento infinitamente pequeno de y, correspondente ao augmento infinitamente pequeno h de x, temos

$$h = \varphi(y+k) - \varphi(y) = k[\varphi'(y) + \alpha],$$

onde α representa uma quantidade infinitamente pequena com k, e portanto com h.

Logo

$$f'(x) = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{1}{\varphi'(y) + \alpha} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

Logo *a derivada de uma funcção é egual á unidade dividida pela derivada da sua funcção inversa.*

II

Derivadas das funcções explicitas algebricas, logarithmicas, circulares, etc.

62. Vamos agora procurar as derivadas das funcções explicitas reaes consideradas na Algebra e na Trigonometria.

Todas estas funcções são constituidas por *funcções simples*, chamando funcções simples aquellas em que a variavel entra affectada de um só dos signaes usados para indicar as combinações analyticas. Por meio dos theoremas demonstrados no n.º 61, póde-se formar a derivada de qualquer funcção, quando se conhecem as derivadas das funcções simples, e vamos porisso procurar estas derivadas.

As funcções simples são as seguintes: $a \pm x$, bx, x^m, e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,cot} x$, $\operatorname{arc\,sec} x$, $\operatorname{arc\,cosec} x$.

Nem todas estas funcções são independentes, e bastaria portanto procurar as derivadas das funcções

$$a + x,\ ax,\ e^x,\ \operatorname{sen} x,$$

de que as outras dependem. Em todo o caso serão aqui todas consideradas, para termos regras que permittam escrever immediatamente as suas derivadas, attendendo á frequencia com que apparecem na Analyse.

1) A derivada da funcção $y = a \pm x$ é

$$y' = \pm 1.$$

2) A derivada de $y = bx$ é

$$y' = b.$$

A derivada da funcção de funcção

$$y = a + bu,$$

onde u representa uma funcção de x, é (n.º 61-IV) $y' = bu'$; e vê se portanto: 1.º *que a derivada do producto de uma constante por uma funcção é egual ao producto da constante pela derivada da funcção*; 2.º *que as constantes podem ser consideradas como funcções cuja derivada é nulla.*

3) No caso da funcção $y = e^x$, onde e representa o numero definido no n.º 45, temos

$$y' = \lim_{h=0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h=0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Mas, como e^h tende para o limite 1, quando h tende para zero, podemos pôr

$$e^h = 1 + \frac{1}{n},$$

onde n representa uma quantidade que tende para o infinito, quando h tende para zero; o que dá

$$h = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

representando por log os logarithmos neperianos.

Virá pois

$$y' = e^x \lim_{n=\infty} \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{e^x}{\lim_{n=\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

e por consequencia (n.º 45)

$$y' = e^x.$$

*

Se for $y = e^u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.° 61-IV)

$$y' = e^u u',$$

o que dá a regra seguinte:

A derivada da exponencial de base e é egual ao producto da mesma exponencial pela derivada do expoente.

Se for $y = a^u$, teremos

$$y = e^{u \log a},$$

e portanto

$$y' = a^u u' \log a.$$

4. A funcção logarithmica $y = \log x$, onde a variavel x é positiva, dá $x = e^y$, e portanto (n.° 61-V)

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Se for $y = \log u$ e $u = \varphi(x)$, teremos (n.° 61-IV)

$$y' = \frac{u'}{u}.$$

Logo *a derivada do logarithmo neperiano de uma funcção é egual á derivada da funcção dividida pela funcção.*

Se for a a base dos logarithmos, teremos (n.° 47-IV)

$$y = \log_a u = \frac{\log u}{\log a}, \quad y' = \frac{u'}{u \log a}.$$

5. No caso da funcção

$$y = x^m$$

temos

$$y = e^{m \log x},$$

o que dá, quando o expoente de e é real, isto é, quando x é positivo e m real [1],

$$y' = e^{m \log x} \frac{m}{x} = \frac{my}{x} = mx^{m-1}.$$

---

[1] A derivada da exponencial de expoente imaginario será considerada adiante.

Se x é negativo e m é real, pondo $x = -z$, temos

$$y = (-1)^m z^m,$$

e portanto

$$y' = (-1)^m m z^{m-1} z' = m x^{m-1},$$

como no caso anterior.

Se for $y = u^m$ e $u = \varphi(x)$, vem

$$y' = m u^{m-1} u'.$$

Logo *a derivada da potencia do grau m de uma funcção fórma-se multiplicando o expoente pela potencia de grau m — 1 da funcção e pela derivada da funcção.*

A regra precedente abrange as raizes das funcções, visto que podem ser representadas por potencias com expoentes fraccionarios. Assim a derivada de $\sqrt[m]{u^n}$ é $\frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} u'$.

Se for $y = u^v$, u e v representando funcções de x, temos $y = e^{v \log u}$ e portanto

$$y' = u^v \left(v' \log u + \frac{u'}{u} v \right).$$

6) A funcção $y = \operatorname{sen} x$ dá

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h=0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h}$$

$$= \cos x \lim_{h=0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

e portanto

$$y' = \cos x.$$

7) Por ser $\cos x = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, a derivada da funcção $y = \cos x$ é dada pela egualdade

$$y' = -\operatorname{sen} x.$$

8) A derivada de $y = \operatorname{tang} x$ obtem-se derivando a fracção $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, o que dá

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{secant}^2 x.$$

Do mesmo modo se acham as derivadas de $\cot x$, de $\sec x$ e de $\operatorname{cosec} x$:

9) $y = \cot x$, $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$,

10) $y = \sec x$, $y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x \sec x$,

11) $y = \operatorname{cosec} x$, $y' = -\cot x \operatorname{cosec} x$.

12) Passando ás funcções circulares inversas, consideremos primeiramente a funcção

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x,$$

que é real no intervallo de $x = -1$ a $x = 1$ e tem um numero infinito de ramos.

Applicando o theorema V do n.º 61 ao ramo formado pelos valores de y comprehendidos entre $-\dfrac{\pi}{2}$ e $+\dfrac{\pi}{2}$, temos

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}.$$

Do mesmo modo se acha a derivada dos outros ramos da funcção.

Obtêem-se de um modo semelhante as derivadas de $\operatorname{arc} \cos x$, de $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, etc.:

13) $y = \operatorname{arc} \cos x$, $y' = \dfrac{1}{-\sqrt{1 - x^2}}$,

14) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$,

15) $y = \operatorname{arc} \cot x$, $y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$,

16) $y = \operatorname{arc} \sec x$, $y' = \dfrac{1}{\pm x \sqrt{x^2 - 1}}$,

17) $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$, $y' = \dfrac{1}{-x \sqrt{x^2 - 1}}$,

considerando o ramo de arc cos x comprehendido entre 0 e π, e os ramos de arc sec x e de arc cosec x comprehendidos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ [1].

III

Relações entre as funcções e suas derivadas

63. THEOREMA 1.º — *Se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada finita e differente de zero no ponto α, a funcção cresce com x, na visinhança do ponto α, se a quantidade $f'(\alpha)$ é positiva, e decresce, quando x cresce, se $f'(\alpha)$ é negativa.*

É o que se deduz da egualdade

$$f(\alpha \pm h) = f(\alpha) \pm h\,[f'(\alpha) + \varepsilon].$$

Com effeito, por ser ε infinitamente pequeno com h, póde sempre dar-se ao numero h_1 um valor tão pequeno que a somma $f'(\alpha) + \varepsilon$ tenha o signal de $f'(\alpha)$, quando $|h| < h_1$. Logo, se $f'(\alpha)$ é positiva, temos

$$f(\alpha - h) < f(\alpha) < f(\alpha + h),$$

quando $|h| < h_1$; e portanto, quando x cresce desde $\alpha - h_1$ até $\alpha + h_1$, a funcção $f(x)$ cresce.

Se porém $f'(\alpha)$ é negativa, temos

$$f(\alpha - h) > f(\alpha) > f(\alpha + h),$$

e a funcção $f(x)$ decresce, na visinhança do ponto α, quando x cresce.

64. THEOREMA 2.º — *Se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos, desde x_0 até X, e se for $f(x_0) = 0$ e $f(\mathrm{X}) = 0$, existe sempre um valor de x, comprehendido entre x_0 e X, que annulla $f'(x)$.*

[1] Os inventores do calculo infinitesimal deram directa ou indirectamente regras para formar as derivadas e differenciaes das funcções algebricas, as unicas que consideraram no primeiro trabalho em que publicaram a sua descoberta, e as funcções dependentes de logarithmos ou arcos de circumferencia. João Bernoulli occupou-se da differenciação das funcções exponenciaes no trabalho, consagrado ao calculo exponencial, mencionado no n.º 47. Finalmente Euler reuniu todas as regras e considerou esta questão de uma maneira systematica completa nas suas *Institutiones calculi differentialis*.

Esta proposição, conhecida pelo nome de *theorema de Rolle* [1], foi demonstrada por O. Bonnet do modo seguinte.

Por ser a funcção $f(x)$ contínua no intervallo de x_0 a X e nulla nos extremos d'este intervallo, ou será constantemente nulla n'este intervallo, ou existirá um ponto x_1 onde terá um valor $f(x_1)$ maior, se a funcção é positiva, ou menor, se é negativa, do que nos outros pontos [2]. No primeiro caso será $f'(x) = 0$, qualquer que seja x. No segundo caso será $f'(x_1) = 0$; porque, se $f'(x_1)$ fosse differente de zero, teriamos, na vesinhança de x_1,

$$f(x_1 + h) > f(x_1) > f(x_1 - h),$$

se $f(x_1)$ fosse positivo, e as desegualdades contrarias, se $f(x_1)$ fosse negativo, e porisso $f(x_1)$ não seria nem o maior nem o menor valor de $f(x)$ no intervallo considerado.

Theorema 3.º — *Se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada $f'(x)$ finita em todos os pontos desde x_0 até X, será*

$$f(X) = f(x_0) + (X - x_0) f'(x_1),$$

x_1 representando um valor comprehendido entre x_0 e X.

Com effeito, applicando o theorema precedente á funcção

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{X - x_0}[f(X) - f(x_0)],$$

que se annulla quando se faz $x = x_0$ e quando se faz $x = X$, temos a egualdade

$$\varphi'(x_1) = f'(x_1) - \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = 0,$$

que dá a fórmula enunciada.

Por estar x_1 comprehendido entre x_0 e X, pode pôr-se $x_1 = x_0 + \theta h$, representando por h a differença $X - x_0$ e por θ uma quantidade positiva desconhecida, comprehendida entre zero e a unidade; e temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0 + \theta h).$$

(1) Por ter sido dado por Rolle, no caso particular das funcções inteiras, no seu *Traité d'Algèbre*, publicado em 1690.

(2) O. Bonnet considerava como evidente a existencia de um valor $f(x_1)$, maior do que os outros valores da funcção. Weierstrass demonstrou rigorosamente este facto, que é o objecto do theorema 3.º do n.º 37.

D'este theorema, devido a Lagrange, deduzem-se os dois corollarios seguintes:

1.º *Se a derivada de uma funcção $f(x)$ é nulla n'um certo intervallo, a funcção é constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, sendo x_0 e $x_0 + h$ dois valores de x pertencentes ao intervallo considerado, por estar $x_0 + \theta h$ comprehendido no intervallo de x_0 a $x_0 + h$, será $f'(x_0 + \theta h) = 0$, e portanto $f(x_0 + h) = f(x_0)$.

2.º *Se duas funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem uma mesma derivada finita em todos os pontos d'um certo intervallo, a sua differença será constante no mesmo intervallo.*

Com effeito, por ser nulla a differença $f'(x) - F'(x)$ das derivadas das duas funcções no intervallo considerado, é constante (corollario precedente) a funcção correspondente $f(x) - F(x)$ no mesmo intervallo.

Theorema 4.º — *Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ tiverem derivadas $f'(x)$ e $F'(x)$ finitas em todos os pontos desde x_0 até X, será*

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]},$$

se a funcção $F'(x)$ for differente de zero no intervallo comprehendido entre x_0 e X.

Demonstra-se este theorema, devido a Cauchy, applicando o theorema de Rolle á funcção

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(x) - [F(x_0) - F(x)] \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)},$$

que se annulla nos pontos x_0 e X; o que dá a egualdade

$$\varphi'(x_1) = -f'(x_1) + F'(x_1) \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = 0,$$

ou

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]}.$$

Nota. Deve-se observar que os theoremas 2.º, 3.º e 4.º ainda têem logar quando as funcções $f(x)$ e $F(x)$ não têem derivadas finitas nos pontos x_0 e X, se todavia estas funcções são contínuas n'estes pontos. É o que resulta immediatamente das demonstrações que vimos de dar, d'estes theoremas.

IV

Funcções de muitas variaveis

65. Passando agora ás funcções de muitas variaveis, consideremos a funcção

$$z = f(x, y, \ldots)$$

das variaveis independentes x, y, etc.

Podemos derivar z relativamente a x, considerando as outras variaveis como constantes, ou relativamente a y, considerando as outras variaveis como constantes, etc. A estas derivadas dão se respectivamente os nomes de *derivada parcial* de z relativamente a x, de *derivada parcial* de z relativamente a y, etc.

Para representar as derivadas parciaes de primeira ordem de z relativamente a $x, y, \ldots$ empregam-se as notações $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ As derivadas de $\frac{\partial z}{\partial x}$ relativamente a $x, y, \ldots$ representam-se pelas notações $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots$. Em geral, representa-se por $\frac{\partial^n z}{\partial x^a \partial y^b \ldots}$ a derivada parcial de ordem n que resulta de derivar a funcção dada a vezes relativamente a x, depois o resultado b vezes relativamente a y, etc.

Empregam-se tambem muitas vezes, para representar as derivadas de primeira ordem de z, as notações $f'_x(x, y, \ldots)$, $f'_y(x, y, \ldots)$, ..., para representar as derivadas de segunda ordem, as notações $f''_{xx}(x, y, \ldots)$, $f''_{xy}(x, y, \ldots)$, ..., etc.

66. THEOREMA 1.º — *Se as derivadas $f''_{xy}(x, y)$ e $f''_{yx}(x, y)$ forem funcções continuas de x e y, é*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Com effeito, applicando o theorema 3.º do n.º 64 ás funcções

$$f(x, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots), \; f'_x(x + \theta_1 h, y, \ldots),$$

considerando na primeira x como variavel independente e na segunda y, vem

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots) &- f(x+h, y, \dots) - [f(x, y+k, \dots) - f(x, y, \dots)] \\ &= h[f'_x(x+\theta_1 h, y+k, \dots) - f'_x(x+\theta_1 h, y, \dots)] \\ &= hk f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \dots), \end{aligned}$$

onde θ_1 e θ_2 representam duas quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Applicando o mesmo theorema ás funcções

$$f(x+h, y, \dots) - f(x, y, \dots), \quad f'_y(x, y+\theta k, \dots),$$

considerando a primeira como funcção de y e a segunda como funcção de x, vem do mesmo modo

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y+k, \dots) &- [f(x+h, y, \dots) - f(x, y, \dots)] \\ &= hk f''_{yx}(x+\theta' h, y+\theta k, \dots), \end{aligned}$$

onde θ e θ' representam quantidades comprehendidas entre 0 e 1.

Egualando estes dois resultados, vem a relação

$$f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, \dots) = f''_{yx}(x+\theta' h, y+\theta k, \dots),$$

da qual se deduz o theorema enunciado, fazendo tender h e k para zero.

THEOREMA 2.º — *Se as derivadas*

$$\frac{\partial^n z}{\partial x \dots \partial t \, \partial u \, \partial v}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x \dots \partial t \, \partial v \, \partial u}$$

forem funcções continuas de u e v, póde-se inverter a ordem das duas derivações consecutivas, relativas a u e v, e temos

$$\frac{\partial^n z}{\partial x \dots \partial t \, \partial u \, \partial v \, \partial w \dots} = \frac{\partial^n z}{\partial x \dots \partial t \, \partial v \, \partial u \, \partial w \dots}.$$

Com effeito, temos primeiramente, em virtude do theorema anterior,

$$\frac{\partial^n z}{\partial x \dots \partial t \, \partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \left(\dfrac{\partial^{n-2} z}{\partial x \dots \partial t} \right)}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 \left(\dfrac{\partial^{n-2} z}{\partial x \dots \partial t} \right)}{\partial v \, \partial u},$$

e portanto

$$\frac{\partial^m z}{\partial x \ldots \partial t\, \partial u\, \partial v} = \frac{\partial^m z}{\partial x \ldots \partial t\, \partial v\, \partial u}.$$

Derivando em seguinda ambos os membros d'esta identidade relativamente a w, etc., obtem-se a egualdade que se queria demonstrar.

Se notarmos que qualquer mudança na ordem em que se effectuam as derivações relativas a x, y, etc. póde ser obtida por mudanças successivas da ordem de duas derivações, póde-se, por applicações successivas do theorema que vimos de demonstrar, inverter a ordem de qualquer numero de derivações. Em todas estas mudanças deve-se attender ás condições relativas á continuidade das derivadas impostas pelo theorema.

67. Vamos agora estender o theorema 3.º do n.º 64 ás funcções de muitas variaveis independentes.

Applicando este theorema á funcção $f(x, y+k)$, considerando-a como funcção de x, vem

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + hf'_x(x+\theta_1 h, y+k),$$

quando a funcção considerada tem uma derivada parcial relativa a x, finita em todos os pontos do intervallo de x a $x+h$.

Applicando o mesmo theorema á funcção $f(x, y)$, considerando-a como uma funcção de y, vem

$$f(x, y+k) = f(x, y) + kf'_y(x, y+\theta_2 k),$$

quando a funcção considerada tem uma derivada parcial relativa a y, finita em todos os pontos do intervallo de y a $y+k$.

Temos pois

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf'_x(x+\theta_1 h, y+k) + kf'_y(x, y+\theta_2 k).$$

Do mesmo modo se acha, no caso de muitas variaveis, a fórmula seguinte:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h, y+k, \ldots, t+l) = f(x, y, \ldots) & \\ + hf'_x(x+\theta_1 h, y+k, \ldots, t+l) & \\ + kf'_y(x, y+\theta_2 k, \ldots, t+l) & \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ + lf'_t(x, y, \ldots, t+\theta_n l). & \end{aligned}\right.$$

68. D'este theorema deduzem-se os dois corollarios importantes seguintes:

1.º Se as derivadas parciaes de primeira ordem da funcção $f(x, y, \dots)$ forem todas finitas, $f(x, y, \dots)$ é uma funcção continua de x, y, etc. Com effeito, o primeiro membro da fórmula (1) tende para $f(x, y, \dots)$, quando h, k, etc. tendem para zero.

2.º Se $f'_x(x, y, \dots)$ for uma funcção continua de $x, y, \dots, t$, se $f'_y(x, y, \dots)$ for uma funcção finita de x e uma funcção continua das outras variaveis, e assim successivamente, temos

$$(2) \quad \begin{cases} f(x+h, y+k, \dots) - f(x, y, \dots) = h f'_x(x, y, \dots) + k f'_y(x, y, \dots) + \dots \\ \qquad + \alpha_1 h + \alpha_2 k + \dots, \end{cases}$$

onde α_1, α_2, etc. representam quantidades que tendem para zero, quando todas as quantidades h, k, etc. tendem para zero.

Com effeito, temos n'este caso

$$f'_x(x+\theta_1 h, y+k, \dots) = f'_x(x, y, \dots) + \alpha_1,$$
$$f'_y(x, y+\theta_2 k, \dots) = f'_y(x, y, \dots) + \alpha_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

onde α_1, α_2, etc. representam quantidades que tendem para zero, quando h, k, etc. tendem para zero.

Substituindo estes valores na fórmula (1), vem a fórmula (2), que se queria demonstrar.

Nas applicações que fizermos da fórmula (2), supporemos, algumas vezes, para simplificar os enunciados das proposições, que $f'_x(x, y, \dots)$, $f'_y(x, y, \dots)$, ... são funcções continuas de todas as variaveis $x, y, \dots, t$.

69. *Derivadas das funcções compostas.* — Á funcção $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$, onde u_1, u_2, etc. representam funcções de x, dá se o nome de *funcção composta* de x por meio de u_1, u_2, etc.

Da fórmula (2) deduz-se uma regra importante para derivar estas funcções.

Dê-se a x o augmento infinitamente pequeno h e sejam l_1, l_2, etc. os augmentos correspondentes de u_1, u_2, etc. Se a funcção $f(u_1, u_2, \dots)$ admitte derivadas parciaes relativamente a u_1, u_2, etc., finitas nos pontos $(u_1, u_2, \dots)$, correspondentes aos valores dados a x, e se a derivada de $f(u_1, u_2, \dots)$ relativamente a u_1 é uma funcção continua de $u_1, u_2, \dots, u_n$, se a derivada de $f(u_1, u_2, \dots)$ relativamente a u_2 é uma funcção continua de $u_2, u_3, \dots, u_n$, e assim successivamente, a fórmula (2) dá

$$f(u_1 + l_1, u_2 + l_2, \dots) - f(u_1, u_2, \dots) = l_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + l_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \dots$$
$$+ \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots.$$

onde α_1, α_2, etc. representam quantidades que tendem para zero, quando l_1, l_2, etc. tendem para zero.

Temos pois, quando h tende para zero,

$$\lim \frac{f(u_1+l_1,\ u_2+l_2,\ \dots)-f(u_1,\ u_2,\ \dots)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_1} \lim \frac{l_1}{h} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \lim \frac{l_2}{h} + \dots$$

$$+ \alpha_1 \lim \frac{l_1}{h} + \alpha_2 \lim \frac{l_2}{h} + \dots,$$

e portanto

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dx}. \tag{3}$$

Esta fórmula importante dá a derivada das funcções compostas, quando são conhecidas as derivadas das funcções que entram na sua composição, e contém como caso particular os theoremas 1.º, 2.º, 3.º e 4.º do n.º 61.

70. *Funcções homogeneas.* — Diz-se que $f(x,\ y,\ \dots)$ é uma funcção *homogenea*, do grau m, quando satisfaz á condição

$$f(tx,\ ty,\ \dots) = t^m f(x,\ y,\ \dots).$$

Derivando os dois membros d'esta identidade relativamente a t por meio do theorema anterior, vem

$$f'_x(tx,\ ty,\ \dots)\,x + f'_y(tx,\ ty,\ \dots)\,y + \dots = mt^{m-1} f(x,\ y,\ \dots)$$

e, pondo $t = 1$,

$$f'_x(x,\ y,\ \dots)\,x + f'_y(x,\ y,\ \dots)\,y + \dots = mf(x,\ y,\ \dots).$$

Consiste n'esta egualdade o *theorema de Euler* relativo ás funcções homogeneas [1].

[1] A theoria da differenciação das funcções de muitas variaveis foi considerada pela primeira vez de um modo systematico geral por Euler nas suas *Inst. Cal. diff.*, onde vem tambem, como applicação d'esta theoria, o theorema que vem de ser demonstrado.

71. A noção de differencial póde ser estendida ao caso das funcções de muitas variaveis independentes.

Se differenciarmos a funcção $z = f(x, y, \ldots)$ relativamente a cada uma das variaveis, considerando as outras como constantes, obtemos os resultados

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial z}{\partial y} dy, \ldots,$$

a que se dão os nomes de *differenciaes parciaes* de z relativamente a x, a y, etc. Á somma d'estas differenciaes parciaes dá-se o nome de *differencial total de z*. Representando-a por dz, temos pois a egualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \ldots,$$

que define dz.

Seja $z = f(u_1, u_2, \ldots)$ e supponhamos que u_1, u_2, ... são funcções de $x, y, \ldots$; temos

$$\begin{aligned} dz = & \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \ldots \right) dx \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \ldots \right) dy \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

e

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy + \ldots,$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} dx + \frac{\partial u_2}{\partial y} dy + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Logo

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \ldots$$

Vê-se pois que dz tem a mesma expressão, quer u_1, u_2, ... sejam variaveis independentes, quer sejam dependentes de outras.

Da egualdade precedente resultam, como corollario, as relações

$$d(u_1 + u_2 + \ldots) = du_1 + du_2 + \ldots$$

$$d(u_1 u_2) = u_1 du_2 + u_2 du_1, \quad d\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 du_1 - u_1 du_2}{u_2^2},$$

as quaes mostram que ás regras, dadas no n.º 61, para formar as derivadas da somma, producto e quociente de funcções, correspondem outras analogas para formar as respectivas differenciaes.

V

Funcções implicitas

72. Consideremos agora as funcções implicitas, isto é, procuremos a derivada relativamente a x de uma funcção y dada pela equação

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Seja $y = \varphi(x)$ uma funcção que tenha um unico valor para cada valor de x e que satisfaça a esta equação, e supponhamos que $\varphi(x)$ admitte uma derivada finita. N'este caso o theorema relativo á derivação das funcções compostas (n.º 69) dá

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\, y' = 0; \tag{2}$$

e portanto temos a fórmula

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{3}$$

por meio da qual se obtem a derivada da funcção $\varphi(x)$, sem resolver a equação proposta relativamente a y.

Por meio da fórmula precedente temos a derivada y' expressa em funcção de x e y. Se quizermos esta derivada só expressa em funcção de uma variavel, eliminaremos a outra por meio da equação proposta.

Derivando pela mesma regra a equação (2), vem a equação

$$F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y)\, y' + F''_{yy}(x, y)\, y'^2 + F'_y(x, y)\, y'' = 0$$

que determina y''.

Continuando do mesmo modo, obtêem-se equações que dão y''', $y^{(4)}$, etc.

As equações que se obtêem derivando successivamente uma equação dada, são respectivamente do primeiro grau relativamente a y', y'', y''', etc. Porém este grau póde elevar-se, já fazendo desapparecer radicaes que lá entrem, já eliminando entre ellas algumas quantidades.

Assim, por exemplo, a equação

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

dá, derivando os seus dois membros relativamente a x, considerando y como funcção de x, a seguinte:

$$a^2 yy' + b^2 x = 0,$$

que determina y'.

Se quizermos exprimir a derivada só em funcção de x, temos de eliminar y entre estas equações, o que dá

$$a^2 (a^2 - x^2) y'^2 = b^2 x^2.$$

Esta equação, ou a anterior, determinam as derivadas dos dois ramos de funcção que se obteriam resolvendo a proposta relativamente a y.

73. Toda a relação da fórma

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

onde $y^{(n)}$ é a derivada da ordem mais elevada, tem o nome de *equação differencial da ordem n*.

O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que da equação

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

que contem n constantes arbitrarias c_1, c_2, etc., resulta uma equação differencial da ordem n, independente d'estas constantes.

Com effeito, derivando n vezes esta equação, obteremos n equações da fórma

$$F_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots) = 0,$$
$$F_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, c_1, c_2, \ldots) = 0,$$

entre as quaes e a proposta podemos eliminar as n constantes arbitrarias. Chega-se assim a uma equação da fórma

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

independente d'estas constantes.

Em Geometria esta equação representa uma propriedade commum a todas as curvas correspondentes á equação proposta.

Exemplo. Consideremos a equação d'um systema de *conicas homofocaes*

$$\frac{x^2}{A+c}+\frac{y^2}{B+c}=1,$$

onde A e B representam constantes determinadas e c uma constante arbitraria.

Derivando esta equação relativamente a x, vem

$$\frac{x}{A+c}+\frac{yy'}{B+c}=0.$$

A eliminação de c entre esta equação e a anterior leva á *equação differencial* das conicas consideradas

$$xyy'^2+(x^2-y^2-A+B)y'-xy=0.$$

Por cada ponto do plano passam duas conicas, que correspondem aos dois valores que a equação proposta dá para c, quando se substituem n'ella x e y pelas coordenadas do ponto considerado. A equação differencial que vimos de obter, dá para y' dois valores y'_1 e y'_2, que satisfazem á condição $y'_1 y'_2=-1$; logo as tangentes a estas duas conicas, no ponto em que se cortam, são perpendiculares uma á outra.

74. As derivadas parciaes das funcções implicitas de muitas variaveis obtêem-se procedendo como no n.º 72.

Assim as derivadas parciaes relativamente a x e y da funcção implicita z, dada pela equação

$$F(x, y, z)=0,$$

obtêem-se por meio das egualdades

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Em geral, se tivermos as n equações com $m+n$ variaveis, das quaes n sejam dependentes e m independentes:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n)=0,$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n)=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, z_1, z_2, \dots, z_n)=0,$$

podemos achar as derivadas das variaveis dependentes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ relativamente ás variaveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ resolvendo as $m.n$ equações do primeiro grau

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial z_n}\cdot\frac{\partial z_n}{\partial x_1}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que resultam de derivar as anteriores relativamente a x_1, x_2, etc., considerando z_1, z_2, etc. como funcções d'estas variaveis.

Derivando estas equações relativamente a x_1, x_2, etc., obtêem-se outras, que determinam as derivadas de segunda ordem de z_1, z_2, etc., e assim successivamente.

75. Toda a relação entre uma funcção e suas derivadas parciaes

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots\right)=0$$

tem o nome de *equação ás derivadas parciaes*. Se a derivada da ordem mais elevada que entra n'esta equação, é da ordem n, diz-se que a equação é da ordem n. O estudo d'estas equações será feito no *Calculo Integral*. Aqui limitar-nos-hemos a observar que de toda a equação

$$F[x, y, z, \varphi(u)]=0,$$

onde $\varphi(u)$ representa uma funcção arbitraria de u e u representa uma funcção determinada de x, y e z, resulta uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem, independente de φ, a que satisfaz a funcção z dada por aquella equação.

Com effeito, derivando-a relativamente a x e a y e representando $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ por p e q, temos as equações

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot p+\frac{\partial F}{\partial \varphi(u)}\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot p\right)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot q+\frac{\partial F}{\partial \varphi(u)}\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot q\right)=0,$$

que, pela eliminação de $\varphi(u)$ e $\varphi'(u)$ entre ellas e a proposta, dão uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem, independente da funcção arbitraria.

Exemplos. 1.º A equação geral das superficies cylindricas

$$x-az=\varphi(y-bz)$$

dá, derivando relativamente a x e a y, considerando z como funcção d'estas variaveis,

$$1 - a p = - b p \varphi'(y - bz),$$

$$- a q = (1 - b q) \varphi'(y - bz);$$

e portanto, eliminando $\varphi'(y - bz)$, temos *a equação ás derivadas parciaes das superficies cylindricas*

$$a p + b q = 1,$$

que deve representar uma propriedade commum a todas estas superficies. Adiante veremos qual é esta propriedade.

2.º A equação geral das superficies de revolução

$$\alpha x + \beta y + z = \varphi[(x - k)^2 + (y - l)^2 + z^2],$$

cujos eixos coincidem com a recta representada pelas equações

$$x = \alpha z + k, \quad y = \beta z + l,$$

dá do mesmo modo *a equação ás derivadas parciaes* d'estas superficies

$$(\alpha + p)(y - l + qz) = (\beta + q)(x - k + pz).$$

3.º Finalmente da equação geral das superficies conicas

$$\frac{x - a}{z - c} = \varphi\left(\frac{y - b}{z - c}\right)$$

resulta *a equação ás derivadas parciaes* d'estas superficies

$$(x - a) p + (y - b) q = z - c.$$

76. Viu-se nos numeros anteriores o modo de achar as derivadas das funcções implicitas, quando se sabe *á priori*, como acontece em muitos casos, que a funcção que se considera admitte derivada. Passando agora ao estudo das condições geraes para a existencia de derivada d'estas funcções, vamos demonstrar os theoremas seguintes[1]:

THEOREMA 1.º *Se a equação*

$$F(x, y) = 0$$

[1] Os fundadores do calculo differencial sabiam formar as derivadas das funcções definidas por equações, e Newton dedicou mesmo algumas paginas do seu *Methodus fluxionum etc.* a este assumpto, ao qual Euler

for satisfeita pelos valores x_0 *e* y_0, *dados a* x *e a* y, *se a funcção* $F(x, y)$ *admittir derivadas parciaes* $F'_x(x, y)$ *e* $F'_y(x, y)$ *continuas no ponto* (x_0, y_0), *e se n'este ponto a derivada* $F'_y(x, y)$ *for differente de zero,* y *é uma funcção definida de* x *na visinhança do ponto* (x_0, y_0), *e esta funcção é continua e admitte uma derivada finita n'este ponto.*

Pondo $x - x_0 = h$ e $y - y_0 = k$ e representando por α_1, α_2 e α_3 tres quantidades infinitamente pequenas com h e k, temos (n.º 68-2.º), quando $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ são finitas no intervallo de x_0 a $x_0 + h$ e y_0 a $y_0 + k$,

$$F(x, y) = [F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1] h + [F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2] k$$

e, em virtude da continuidade da funcção $F'_y(x, y)$ no ponto (x_0, y_0),

$$F'_y(x, y) = F'_y(x_0, y_0) + \alpha_3.$$

Seja h_1 um numero de valor absoluto tão pequeno que, para os valores de $|h|$ e $|k|$ que não sejam maiores do que $|h_1|$, as quantidades $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ sejam finitas e as quantidades

$$F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2, \quad F'_y(x_0, y_0) + \alpha_3$$

(cujos primeiros termos são differentes de zero, por hypothese, e cujos segundos termos tendem para zero com h e k) sejam differentes de zero e tenham o signal de $F'_y(x_0, y_0)$; e dêem-se na primeira das fórmulas precedentes a k o valor h_1 e a h valores taes que seja $|h| < h_1^2$. Teremos, pondo $h = \pm \theta h_1^2$ (onde θ representa um numero positivo menor do que a unidade)

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \pm [F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1] \theta h_1^2 + [F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2] h_1 \\ &= h_1 [F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2] \left[1 \pm \theta \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1}{F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2} h_1 \right]. \end{aligned}$$

D'esta fórmula conclue-se que $F(x, y)$ tem o signal de $h_1 F'_y(x_0, y_0)$, quando se dá a $|h_1|$ um valor tão pequeno que seja

$$\left| \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha_1}{F'_y(x_0, y_0) + \alpha_2} h_1 \right| < 1;$$

e portanto que, para cada valor $x_0 + h$ de x, comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, $F(x, y)$ muda de signal, quando y varia desde $y_0 - h_1$ até $y_0 + h_1$.

A cada valor de x comprehendido entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$ corresponde pois sempre um

---

deu, nas suas *Institutiones calculi differentialis*, a fórma geral actualmente empregada. Durante muito tempo, porém, os geometras admittiram, sem demonstração, a existencia de derivada das funcções implicitas que consideraram, e foi Cauchy quem principalmente estudou as condições para que esta circumstancia tenha logar.

valor de y, comprehendido entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$, que satisfaz (n.º 37-1.º) á equação $F(x, y) = 0$; e não póde corresponder mais (n.º 64-2.º) do que um, visto que a derivada $F'_y(x, y)$ não é nulla n'este intervallo. Logo a collecção dos valores de y comprehendidos entre $y_0 - h_1$ e $y_0 + h_1$, determinados pela equação $F(x, y) = 0$, quando se dão a x os valores comprehendidos entre $x_0 - h_1^2$ e $x_0 + h_1^2$, constitue uma funcção $\varphi(x)$, definida no intervallo considerado, a qual satisfaz a esta equação.

Como além d'isso, quando h_1 tende para zero, x tende para x_0 e y tende para y_0, vê-se que $\varphi(x)$ é continua no ponto x_0.

Finalmente a funcção $y = \varphi(x)$ admitte uma derivada finita no ponto (x_0, y_0). Com effeito, mudando na equação proposta x_0 em $x_0 + h$ e y_0 em $y_0 + k$ (representando agora por $y_0 + k$ o valor que toma a funcção $y = \varphi(x)$ quando a x se dá o valor $x_0 + h$), temos

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0) h + F'_y(x_0, y_0) k + \alpha_1 h + \alpha_2 k = 0$$

ou

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0) \frac{k}{h} + \alpha_1 + \alpha_2 \frac{k}{h} = 0.$$

Temos pois, fazendo tender h para zero e notando que, por ser $\varphi(x)$ uma funcção continua de x, k tende tambem para zero,

$$\varphi'(x_0) = \lim \frac{k}{h} = - \frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)};$$

o que concorda com o que se disse no n.º 72.

Ao que vem de dizer-se accrescentaremos ainda o seguinte.

Supponhamos que $F'_x(x, y)$ e $F'_y(x, y)$ são funcções continuas no ponto (x, y), quando x e y estão respectivamente comprehendidos nos intervallos $(x_0 - h_1^2, x_0 + h_1^2)$ e $(y_0 - h_1, y_0 + h_1)$, precedentemente determinados. N'este caso o ponto (x, y) satisfaz ás condições impostas no enunciado do theorema ao ponto (x_0, y_0), e temos portanto, para todos os valores de x pertencentes ao intervallo $(x_0 - h_1^2, y_0 + h_1^2)$,

$$\varphi'(x) = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

onde $y = \varphi(x)$.

Vê-se pois que, no intervallo considerado, $\varphi'(x)$ é uma funcção definida de x, e que esta funcção admitte, no mesmo intervallo, uma derivada finita $\varphi''(x)$, quando o numerador e o denominador da sua expressão a admittirem, isto é, quando $F(x, y)$ admittir derivadas parciaes de segunda ordem relativamente a x e y que sejam continuas nos intervallos precedentemente assignados a estas variaveis.

Do mesmo modo se consideram as derivadas seguintes.

THEOREMA 2.º *Se a equação*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0$$

for satisfeita pelos valores $a_1, a_2, \ldots, a_m, y_0$, *dados a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$; *se a funcção* $F(x_1, \ldots, x_m, y)$ *admittir derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$, *continuas no ponto* $(a_1, a_2, \ldots, a_m, y_0)$; *e se n'este ponto a derivada* F'_y *for differente de zero,* y *é uma funcção definida de* $x_1, x_2, \ldots x_m$, *na visinhança do ponto* $(a_1, a_2, \ldots, a_m, y_0)$, *e esta funcção é continua e admitte n'este ponto derivadas parciaes finitas relativamente a* x_1, x_2, *etc.*

A demonstração d'este theorema é semelhante á demonstração empregada para estabelecer o theorema anterior.

THEOREMA 3.º *Se as equações*

$$F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ \ldots,\ F_n = 0,$$

onde entram as variaveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *e as variaveis dependentes* $z_1, z_2, \ldots, z_n$, *foram satisfeitas pelos valores* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$, *dados a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_n$; *se as funcções* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *admittirem derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a* $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1, z_2, \ldots, z_n$, *que sejam funcções continuas d'estas variaveis no ponto* $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$; *e se n'este ponto o determinante*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_1} & \frac{\partial F_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$

for differente de zero; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *são funcções definidas de* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$, *na visinhança do ponto considerado, e admittem n'este ponto derivadas parciaes finitas relativamente a* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$.

Como este theorema vem de ser demonstrado no caso de ser dada uma só equação, para o demonstrar completamente, vamos provar que, se é verdadeiro no caso de serem dadas $n-1$ equações, ainda é verdadeiro quando são dadas n equações.

Por não ser, por hypothese, nullo no ponto $(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots,)$ o determinante J, tambem não podem ser nullos n'este ponto todos os determinantes menores que resultam de

supprimir a primeira columna. Seja pois, por exemplo, differente de zero o determinante

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial F_2}{\partial z_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}.$$

As equações $F_2 = 0, \ldots, F_n = 0$ determinam n'este caso $z_2, z_3, \ldots, z_n$ em funcção de $z_1, x_1, x_2, \ldots, x_m$, e, substituindo estes valores em F_1, vem

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, z_1).$$

Temos portanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_1}.$$

Eliminando depois $\frac{\partial z_2}{\partial z_1}$, $\frac{\partial z_3}{\partial z_1}$, etc. entre esta equação e as seguintes:

$$\frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial z_1} + \frac{\partial F_n}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_1} = 0,$$

vem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{J}{J_1}.$$

Vê-se pois que $\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$ é differente de zero no ponto $(b_1, a_1, a_2, \ldots)$; e portanto que (th. 2.º) a equação $\varphi = 0$ determina z_1 em funcção de x_1, x_2, etc., que esta funcção satisfaz á equação $F_1 = 0$ conjunctamente com os valores de z_1, z_2, etc. dados, por hypothese, pelas equações $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, etc., e que a funcção z_1 admitte tambem derivadas parciaes relativamente a x_1, x_2, etc. no ponto $(b_1, a_1, a_2, \ldots)$.

VI

Derivadas dos determinantes. Determinantes funccionaes

77. Procuremos agora a derivada do determinante

$$f(x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

onde u_1, u_2, v_1, v_2 são funcções de x.

Mudando x em $x+h$ e chamando k_1, k_2, l_1, l_2 os augmentos correspondentes de u_1, u_2, v_1, v_2, vem

$$f(x+h)=\begin{vmatrix} u_1+k_1 & u_2+k_2 \\ v_1+l_1 & v_2+l_2 \end{vmatrix},$$

ou, em virtude de um theorema bem conhecido,

$$f(x+h)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_1 & k_2 \\ v_1 & l_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k_1 & u_2 \\ l_1 & v_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix}.$$

Temos pois

$$f'(x)=\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\begin{vmatrix} u_1 & u'_2 \\ v_1 & v'_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u'_1 & u_2 \\ v'_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

O raciocinio precedente applica-se evidentemente a um determinante com qualquer numero de columnas, e vê-se que *a derivada de um determinante é egual á somma dos determinantes que se obtêem substituindo cada columna do determinante proposto por outra formada pelas derivadas dos termos d'aquella.*

78. Consideremos as funcções

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Com as derivadas d'estas funcções forme-se o determinante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

que se representa tambem por

$$\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

e que se chama *determinante funccional* ou *jacobiano*. Este determinante, estudado pela primeira vez por Jacobi, apparece em muitas questões e tem propriedades muito importantes, para o estudo das quaes se póde recorrer á memoria intitulada *De determinantibus functionalibus* (1) d'este eminente geometra. No theorema 3.º do n.º 76 vimos já uma questão em que intervem este determinante. Aqui vamos demonstrar, a respeito d'elle, os theoremas seguintes, dados na referida memoria.

I. Supponhamos que as funcções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ admittem derivadas parciaes relativas a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e que estas derivadas são funcções continuas d'estas variaveis. N'este caso temos o theorema seguinte:

1.º *Se uma das funcções $y_1, y_2, \ldots, y_n$, por exemplo y_1, for uma funcção das outras e admittir derivadas parciaes, relativamente a $y_2, y_3, \ldots, y_n$, que sejam funcções continuas d'estas variaveis, o determinante* (2) *é identicamente nullo.*

2.º *Se o determinante* (2) *for identicamente nullo, mas não o for um dos seus menores de primeira ordem, uma das quantidades y_1, y_2, etc. (aquella cujas derivadas não entram n'este determinante menor) é funcção das outras, e esta funcção é continua e admitte derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante menor considerado não é nullo.*

3.º *Em geral, se forem identicamente nullos o determinante* (2) *e os seus menores até á ordem i e não o for um dos determinantes menores da ordem $i+1$, $i+1$ das quantidades $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (aquellas cujas derivadas não entram n'este determinante menor) são funcções das restantes, e estas funcções são continuas e admittem derivadas parciaes finitas nos pontos em que o determinante de ordem $i+1$ considerado não é nullo.*

Para demonstrar esta proposição, consideremos sómente tres funcções

$$(1') \qquad y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \; y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) = f_3(x_1, x_2, x_3).$$

(1) Jacobi: *Gesammelte Werke*, tom. III.

É facil de ver que o raciocinio que vamos empregar, é applicavel a maior numero de funcções.

Se for $y_1 = \varphi(y_2, y_3)$, temos

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_3},$$

e portanto, eliminando $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}$ entre estas equações,

$$(2') \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

o que demonstra a primeira parte do theorema.

Para demonstrar a proposição reciproca, supponhamos que o determinante (2′) é identicamente nullo e que um dos determinantes menores de segunda ordem não é identicamente nullo, por exemplo o determinante

$$\frac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}.$$

Em virtude do theorema 3.º do n.º 76, as duas ultimas equações (1′) determinam x_2 e x_3 como funcções de x_1, y_2 e y_3, e, nos pontos em que este determinante não é nullo, estas funcções admittem derivadas parciaes relativas a x_1, y_2, y_3, dadas pelas equações

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0,$$

. . . .

Substituindo estes valores de x_2 e x_3 na primeira das equações (1′), vem

$$y_1 = \varphi(x_1, y_2, y_3),$$

e, em virtude do theorema relativo á derivação das funcções compostas, y_1 admitte derivadas parciaes relativamente a x_1, y_2 e y_3. A derivada relativa a x_1 é dada pela equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1},$$

onde se devem substituir $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ pelos seus valores, tirados das equações anteriores, o que dá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)}}{\dfrac{\partial (f_2, f_3)}{\partial (x_2, x_3)}}.$$

Como o segundo membro d'esta egualdade é, por hypothese, identicamente nullo, é idendicamente nulla a derivada de φ relativamente a x_1; portanto φ é independente de x_1, e temos

$$y_1 = \varphi (y_2, y_3),$$

que é o que se queria demonstrar.

Se todos os determinantes menores de primeira ordem do determinante (1') forem identicamente nullos, recorre-se aos determinantes de segunda ordem, que no caso considerado não podem ser todos identicamente nullos, sem que as funcções sejam todas constantes. Seja pois $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ um dos determinantes de terceira ordem que não é identicamente nullo. A ultima das equações (1') determinará x_3 em funcção de x_1, x_2 e y_3, e as suas derivadas relativamente a x_1 e x_2 serão dadas pelas equações

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0.$$

Substituindo o valor de x_3 na primeira das equações (1'), vem

$$y_1 = \varphi (x_1, x_2, y_3),$$

e as derivadas de φ relativamente a x_1 e x_2 são dadas pelas equações

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_2}$$

ou, eliminando $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ por meio das equações anteriores,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial (y_1, y_3)}{\partial (x_1, x_3)}}{\frac{\partial y_3}{\partial x_3}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial (y_1, y_3)}{\partial (x_2, x_3)}}{\frac{\partial y_3}{\partial x_3}}.$$

Como, por hypothese, os segundos membros d'estas equações são identicamente nullos, a funcção φ é independente de x_1 e x_2, e temos

$$y_1 = \varphi(y_3).$$

Do mesmo modo a segunda das equações (1') dá

$$y_2 = \psi(y_3).$$

II. *Se nas funcções $f_1, f_2, \dots, f_n$ substituirmos as variaveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ por outras, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, ligadas com as primeiras por equações dadas, o jacobiano das novas funcções estará ligado com o jacobiano* (2) *pela relação*

$$(4) \qquad \frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial (y_1, \dots, y_n)}{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)} \cdot \frac{\partial (\theta_1, \dots, \theta_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}.$$

Para demonstrar este theorema, basta substituir no determinante (2) as derivadas que lá entram pelos seus valores, tirados das equações que se formam dando a k e a i os valores $1, 2, \dots, n$ na equação

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial y_k}{\partial \theta_n} \cdot \frac{\partial \theta_n}{\partial x_i},$$

e applicar depois o theorema da multiplicação dos determinantes.

A fórmula (4) contem o theorema 4.º do n.º 61, o qual corresponde ao caso de ser $n = 1$.

III. Se, no theorema precedente, as equações que ligam as novas variaveis ás antigas são as equações lineares

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta_1 = a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta_n = a_1^n x_1 + \dots + a_n^n x_n, \end{cases}$$

vem

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = M \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(\theta_1, \ldots, \theta_n)}, \tag{6}$$

pondo

$$M = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} \ldots a_n^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(n)} \ldots a_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

79. Se as funcções $f_1, \ldots, f_n$ forem as derivadas parciaes $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ de uma funcção $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, o determinante (2) reduz-se ao determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix},$$

que se chama *hesseano*, para recordar o nome do eminente geometra O. Hesse, que primeiro o considerou.

A respeito d'este determinante, limitar-nos-hemos aqui a procurar a relação entre o *hesseano* da funcção dada e o *hesseano* da funcção em que esta se transforma pela substituição das variaveis x_1, x_2, etc. pelas variaveis θ_1, θ_2, etc., ligadas com as primeiras pelas equações (5).

Por ser y funcção de $x_1, \ldots, x_n$ e portanto de $\theta_1, \ldots, \theta_n$, temos, em virtude das fórmulas (5),

$$y_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \ldots + a_1^{(n)} \frac{\partial y}{\partial \theta_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = \frac{\partial y}{\partial x_n} = a_n^{(1)} \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \ldots + a_n^{(n)} \frac{\partial y}{\partial \theta_n}.$$

Substituindo estes valores em

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(\theta_1, \ldots, \theta_n)}$$

e attendendo ao theorema da multiplicação dos determinantes, vem

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(\theta_1, \ldots, \theta_n)} = M \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} \cdots \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n \partial \theta_1} \cdots \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n^2} \end{vmatrix}.$$

Logo a fórmula (6) dá

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} = M^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2} \cdots \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1 \partial \theta_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_n \partial \theta_1} \cdots \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_2^2} \end{vmatrix}.$$

VII

Derivada de limites de sommas. Derivada dos arcos de curva

80. Seja $f(x)$ uma funcção de x continua em todos os pontos do intervallo de x_0 a X. Decomponha-se $X - x_0$ em n intervallos eguaes a $h_1, h_2, \ldots, h_n$, o que dá

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = X - x_0,$$

e representem-se por $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ os numeros, comprehendidos entre x_0 e X, que separam estes intervallos, isto é, os numeros definidos pelas equações

$$z_1 = x_0 + h_1,\ z_2 = z_1 + h_2,\ \ldots,\ X = z_{n-1} + h_n.$$

Finalmente, representem-se por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ quaesquer numeros que pertençam respectivamente aos intervallos de x_0 a z_1, de z_1 a z_2, de z_2 a z_3, etc. Posto isto, vamos demonstrar o theorema seguinte:

A somma

$$S = h_1 f(x_1) + h_2 f(x_2) + \ldots + h_n f(x_n) = \Sigma h_i f(x_i)$$

tende para um limite, quando se augmenta o numero de intervallos em que se decompõe $X - x_0$,

de modo que todas as quantidades $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *tendam para zero, e este limite é sempre o mesmo, qualquer que seja o modo como se escolham os numeros* z_1, z_2, *etc., e os numeros* x_1, x_2, *etc.*

Seja $X > x_0$ e supponhamos primeiramente que se escolhem os numeros x_1, x_2, etc. de modo que $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. representem os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varía respectivamente de x_0 a z_1, de z_1 a z_2, etc. Decompondo o intervallo h_i em m intervallos parciaes h_i', h_i'', etc., o que dá

$$h_i = h_i' + h_i'' + \ldots,$$

e chamando x_i', x_i'', etc. os valores de x a que correspondem os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varía desde z_{i-1} até $z_{i-1} + h_i'$, de $z_{i-1} + h_i'$ até $z_{i-1} + h_i' + h_i''$, etc., temos

$$f(x_i) \leqq f(x_i'),\ f(x_i) \leqq f(x_i''), \text{ etc.},$$

e portanto

$$h_i f(x_i) = h_i' f(x_i) + h_i'' f(x_i) + \ldots > h_i' f(x_i') + h_i'' f(x_i'') + \ldots$$

O primeiro membro d'esta desegualdade representando uma qualquer das parcellas de S e o segundo membro a somma das que a substituem quando se divide h_i em m partes, podemos concluir que a somma S diminue, quando augmenta o numero de partes em que se divide o intervallo h_i. Por outra parte, o seu valor conserva-se sempre maior do que

$$m(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = m(X - x_0),$$

representando por m o menor valor que toma $f(x)$, quando x varía desde x_0 até X. Logo a somma S tende para um limite, quando as quantidades h_1, h_2, etc. tendem todas para zero.

Supponhamos agora que $f(x_1)$, $f(x_2)$, etc. não representam os maiores valores que toma $f(x)$, quando x varía respectivamente de x_0 a z_1, de z_1 a z_2, etc., e sejam M_1, M_2, M_3, etc. estes valores. Pondo

$$f(x_1) = M_1 - \varepsilon_1,\ f(x_2) = M_2 - \varepsilon_2,\ \ldots,$$

temos

$$\Sigma h_i f(x_i) = \Sigma h_i M_i - \Sigma h_i \varepsilon_i,$$

ou, chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, etc.,

$$|\Sigma h_i f(x_i) - \Sigma h_i M_i| = |\Sigma h_i \varepsilon_i| \leqq \Sigma h_i |\varepsilon_i| \leqq \varepsilon \Sigma h_i.$$

Mas, por ser continua a funcção $f(x)$ em todos os pontos desde x_0 até X, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um numero η, tal que as desegualdades $|\varepsilon_1| < \delta$, $|\varepsilon_2| < \delta$, etc. são satisfeitas quando a h_1, h_2, etc. se dão valores inferiores a η [1]. Logo, quando h_1, h_2, etc. tendem para zero, ε tende para zero. Por isto e por ser Σh_i egual a $X - x_0$, conclue-se da desegualdade precedente que as duas sommas $\Sigma h_i f(x_i)$ e $\Sigma h_i M_i$ tendem para um mesmo limite.

Resta demonstrar que este limite é sempre o mesmo, qualquer que seja o modo como se escolham os numeros z_1, z_2, etc. Para isso, consideremos duas sommas S e S_1, correspondentes a dois modos de divisão do intervallo $X - x_0$, e seja S_2 uma somma correspondente a um terceiro modo de divisão, em que figurem todos os intervallos das duas divisões anteriores. O intervallo h_i da primeira divisão conterá um ou mais intervallos h'_i, h''_i, etc. da terceira divisão, e á parcella $h_i f(x_i)$ da somma S corresponderão as parcellas

$$h'_i f(x'_i),\ h''_i f(x''_i),\ \ldots$$

da somma S_2. Pondo pois

$$f(x_i) = f(x'_i) + \varepsilon_i,\ f(x_i) = f(x''_i) + \varepsilon'_i,\ \ldots,$$

$$u_i = h'_i f(x'_i) + h''_i f(x''_i) + \ldots,$$

temos

$$S_2 = \Sigma u_i = \Sigma f(x_i)(h'_i + h''_i + \ldots) - \Sigma(\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \ldots)$$

$$= \Sigma f(x_i) h_i - \Sigma(\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \ldots),$$

d'onde se tira

$$|S_2 - S| = |\Sigma(\varepsilon_i h'_i + \varepsilon'_i h''_i + \ldots)| < \varepsilon \Sigma h_i,$$

chamando ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, ..., $|\varepsilon'_1|$, $|\varepsilon'_2|$, ..., etc.

Mas, por ser continua a funcção $f(x)$, ε tende para zero, quando h_1, h_2, etc. tendem para zero; logo S e S_2 tendem para um mesmo limite.

Demonstra-se do mesmo modo que S_1 e S_2 tendem tambem para um mesmo limite.

Logo S e S_1 tendem para um mesmo limite, que é o que se queria demonstrar.

No que precede suppozemos $X > x_0$. Se for porém $X < x_0$, o theorema subsiste, porque, como as quantidades h_1, h_2, etc. são n'este caso negativas, $-S$ tende para um limite determinado, e portanto S tende para um limite egual áquelle em valor absoluto mas de signal contrario.

---

(1) Este facto, consequencia do theorema 4.º do n.º 37, foi considerado durante muito tempo como evidente.

I. No caso de $f(x)$ ser positiva no intervallo de x_0 a X e de ser $X > x_0$, todas as parcellas de S são tambem positivas, e o limite para que tende esta somma, quando h_1, h_2, etc. tendem para zero, representa, por definição, *a área do segmento plano limitado pela curva cuja equação é $y = f(x)$, pelo eixo das abscissas e por duas parallelas ao eixo das ordenadas, tiradas pelos pontos cujas abscissas são eguaes a x_0 e X*. Esta definição concorda com a que foi dada no n.º 58-II, visto que as sommas (A) e (B), consideradas no referido paragrapho, correspondem a dois modos particulares de escolher os valores de z_1, z_2, etc., que entram na expressão de S; tem todavia uma fórma mais geral. Accrescentaremos ainda que no n.º 58 se admittiu como postulado a existencia do limite das sommas mencionadas, e que este facto está agora demonstrado.

81. O limite para que tende a somma S, quando todas as quantidades h_1, h_2, etc. tendem para zero, é uma funcção de X, que representaremos por F(X). Procuremos a derivada d'esta funcção.

Se mudarmos em F(X) a variavel X em $X + h$ e se chamarmos k o augmento correspondente d'esta funcção, temos

$$k = \lim \left[h_{n+1} f(x_{n+1}) + \ldots + h_{n+i} f(x_{n+i})\right],$$

onde é

$$h_{n+1} + h_{n+2} + \ldots + h_{n+i} = h.$$

Representando por $f(x'')$ e $f(x')$ o menor e o maior dos valores que toma $f(x)$, quando x varía desde X até $X + h$, vê-se que o valor de k está comprehendido entre

$$f(x')\,(h_{n+1} + \ldots + h_{n+i}) = f(x')\,h$$

e

$$f(x'')\,(h_{n+1} + \ldots + h_{n+i}) = f(x'')\,h.$$

Logo, se $h > 0$, temos

$$hf(x'') < k < hf(x'),$$

e portanto

$$f(x'') < \frac{k}{h} < f(x');$$

e, se $h < 0$,

$$f(x') < \frac{k}{h} < f(x'').$$

Fazendo agora tender h para zero, x e x' tendem para X e, por ser continua a funcção $f(x)$, $f(x')$ e $f(x'')$ tendem para $f(X)$; temos portanto

$$\lim \frac{k}{h} = f(X).$$

Logo *a funcção* F(X) *admitte derivada no ponto* X, *e esta derivada é egual a* $f(X)$.

A demonstração que se deu d'este theorema no n.º 58 III é a representação geometrica da que vem de expôr-se

82. *Derivada dos arcos de curva*[1]. Dá-se o nome de *comprimento de um arco de curva* ao limite para que tendem os perimetros dos polygonos inscriptos n'este arco, quando todos os lados tendem para zero.

Para justificar esta definição, é necessario demonstrar que este limite existe e que tem um valor unico, qualquer que seja a lei de inscripção dos polygonos.

Supponhamos que as coordenadas dos pontos da curva considerada são determinadas pelas equações $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \pi(t)$, dando diversos valores á variavel independente t, e que a cada valor dado a t corresponde um unico ponto.

Em um arco desta curva, comprehendido entre os pontos (x_0, y_0, z_0) e (x, y, z), correspondentes aos valores t_0 e t da variavel independente, inscrevamos um polygono qualquer, e sejam (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), etc. os seus vertices e t_1, t_2, etc. os valores de t a que correspondem. O perimetro P do polygono será dado pela fórmula

$$P = \Sigma \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2},$$

onde a somma representada por Σ se refere a todos os lados do polygono, a qual, representando por t_i', t_i'' e t_i''' tres valores de t, comprehendidos entre t_i e t_{i+1}, por h_i a differença $t_{i+1} - t_i$ e attendendo ás egualdades (n.º 64)

$$x_{i+1} - x_i = h_i \varphi'(t_i'),\quad y_{i+1} - y_i = h_i \psi'(t_i''),\quad z_{i+1} - z_i = h_i \pi'(t_i'''),$$

se reduz á seguinte:

$$P = \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t_i')]^2 + [\psi'(t_i'')]^2 + [\pi'(t_i''')]^2}.$$

Ponha-se agora

$$\varepsilon = \sqrt{[\varphi'(t_i')]^2 + [\psi'(t_i'')]^2 + [\pi'(t_i''')]^2}$$
$$- \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2}$$

---

(1) Foi Newton quem primeiro applicou a analyse infinitesimal á rectificação das curvas. Antes d'isso poucas curvas tinham sido rectificadas.

*

e represente-se por ε a maior das quantidades $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, etc. Teremos

$$\mathrm{P} = \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2} + \Sigma \varepsilon_i h_i,$$

d'onde resulta

$$\left| \mathrm{P} - \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2} \right| = |\Sigma \varepsilon_i h_i| < \varepsilon \Sigma h_i .$$

Mas a expressão de ε_i pode ser reduzida á fórma

$$\varepsilon_i = \frac{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i')]^2 + [\pi'(t_i'')]^2 - \{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2\}}{\sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i')]^2 + [\pi'(t_i'')]^2} + \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2}},$$

e portanto temos, representando por m o menor valor que toma $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\pi'(t)]^2}$ nos pontos do arco considerado e suppondo que este valor é differente de zero,

$$|\varepsilon_i| < \frac{1}{m} \{ [\varphi'(t_i)]^2 - [\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i')]^2 - [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i'')]^2 - [\pi'(t_i)]^2 \}.$$

Suppondo agora que $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ e $\pi'(t)$ são funcções continuas de t em todos os pontos do arco considerado, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um numero η, tal que é

$$|[\varphi'(t_i)]^2 - [\varphi'(t_i)]^2| < \delta, \quad |[\psi'(t_i')]^2 - [\psi'(t_i)]^2| < \delta, \quad |[\pi'(t_i'')]^2 - [\pi'(t_i)]^2| < \delta,$$

quando h_1, h_2, ..., são menores do que η.

Logo temos $|\varepsilon_i| < \delta$, qualquer que seja i, e portanto tambem $\varepsilon < \delta$; o que mostra que ε tende para zero, quando h_1, h_2, ... tendem para zero, e portanto que é

$$\lim \left[\mathrm{P} - \Sigma h_i \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2 + [\pi'(t_i)]^2} \right] = 0.$$

Esta fórmula mostra, em virtude dos theoremas demonstrados nos numeros precedentes, que o limite de P existe; que é unico, qualquer que seja o modo como as quantidades h_1, h_2, etc. tendam para zero; e, finalmente, que a derivada d'este limite, que representaremos por s, é dada pela fórmula

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

onde o radical deve ser tomado com o signal $+$ quando s e t variam no mesmo sentido (n.º 63), e com o signal $-$ no caso contrario.

Da egualdade precedente deduz-se a expressão da differencial de s:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

I. *O limite da razão do comprimento de um arco para o da sua corda é egual á unidade.*

Sejam l e c os comprimentos do arco e da corda correspondente, e t e $t+dt$ os valores que toma a variavel t nas suas extremidades. Temos, representando por t_1, t_2 e t_3 tres numeros comprehendidos entre t e $t+dt$ (n.º 63).

$$c = \sqrt{[\varphi(t+dt) - \varphi(t)]^2 + [\psi(t+dt) - \psi(t)]^2 + [\pi(t+dt) - \pi(t)]^2}$$

$$= dt\sqrt{[\varphi'(t_1)]^2 + [\psi'(t_2)]^2 + [\pi'(t_3)]^2}.$$

Por outra parte, como l representa o augmento que recebe o comprimento do arco s, contado a partir de uma origem fixa, quando se muda t em $t+dt$, temos (n.º 56) $\lim \frac{l}{ds} = 1$. Logo

$$\lim \frac{l}{c} = \lim \frac{l}{ds} \lim \frac{ds}{c} = \lim \frac{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\pi'(t)]^2}}{\sqrt{[\varphi'(t_1)]^2 + [\psi'(t_2)]^2 + [\pi'(t_3)]^2}}.$$

Basta agora attender a que t_1, t_2 e t_3 tendem para t, quando dt tende para zero, e admittir que as funcções $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ e $\pi'(t)$ são continuas no ponto t, para concluir que $\lim \frac{l}{c} = 1$.

II. Se a curva dada for plana, a expressão de ds reduz-se á seguinte:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se quizermos o valor de ds expresso em coordenadas polares, faremos a transformação da fórmula precedente por meio das relações

$$x = \rho \cos\theta, \quad dx = d\rho \cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta \, d\theta,$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta, \quad dy = d\rho \operatorname{sen}\theta + \rho \cos\theta \, d\theta,$$

e acharemos

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}.$$

VIII

Mudança das variaveis

83. O problema que vamos resolver é o seguinte:

Dada uma expressão analytica ou uma equação, em que entrem variaveis independentes, variaveis dependentes e derivadas d'estas, achar a sua transformada, quando se substituem todas ou algumas das variaveis por outras, ligadas com as primeiras por equações dadas.

Esta transformação é empregada em Geometria, quando, tendo um resultado expresso em um systema de coordenadas, se quer exprimil-o n'outro systema. Em Analyse tem tambem uma importancia grande, como iremos vendo.

84. Consideremos primeiramente expressões em que entrem duas variaveis, uma dependente e outra independente:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\right),$$

e resolvamos os dois problemas seguintes:

1.° *Substituir a variavel independente x por outra θ, ligada com x pela relação $\varphi(x, \theta) = 0$.*

Chamando x', x'', etc., y', y'', etc. as derivadas de x e de y relativamente a θ, teremos (n.° 61-IV)

$$y' = \frac{dy}{dx} x', \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} x'^2 + \frac{dy}{dx} x'',$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} x'^3 + 3 \frac{d^2y}{dx^2} x' x'' + \frac{dy}{dx} x'''$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e portanto

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x' y'' - y' x''}{x'^3}, \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{x'^2 y''' - x' y' x''' - 3x' x'' y'' + 3y' x''^2}{x'^5}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

onde se devem substituir as derivadas de x pelos seus valores tirados da equação $\varphi(x, \theta) = 0$.

Substituindo depois os valores de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., obtidos d'este modo, na expressão proposta, resolve-se o problema enunciado.

Exemplo. — Substituindo na expressão

$$F\left(x,\ \sqrt{x^2+bx+c},\ \frac{dy}{dx}\right),$$

onde F representa uma funcção racional de x, $\sqrt{x^2+bx+c}$ e $\frac{dy}{dx}$, a variavel x por outra θ, ligada com x pela equação

$$\sqrt{x^2+bx+c}=x-\theta,$$

que dá

$$x=\frac{\theta^2-c}{b+2\theta},\quad x'=\frac{2(\theta^2+b\theta+c)}{(b+2\theta)^2},$$

vem uma expressão da fórma

$$f\left(\theta,\ \frac{dy}{d\theta}\right),$$

onde f representa uma funcção racional de θ e $\frac{dy}{d\theta}$. Temos assim um exemplo da transformação de uma funcção irracional n'outra racional.

2.º *Substituir as variaveis x e y por outras ρ e θ, ligadas com x e y pelas equações*

$$\varphi(x,\ y,\ \theta,\ \rho)=0,\quad \psi(x,\ y,\ \theta,\ \rho)=0,$$

sendo θ a nova variavel independente.

Para resolver este problema basta derivar as equações precedentes relativamente a θ, considerando x, y e ρ como funcções d'esta variavel, o que dá

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}x'+\frac{\partial\psi}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

e em seguida substituir nas fórmulas (1) os valores de x', y', x'', y'', etc., tirados das equações precedentes. Obtêem-se assim os valores das derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

Exemplo. — Transformar a expressão

$$\mathrm{R}=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

sendo

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta$$

as equações que ligam as novas variaveis ás antigas.

Temos

$$x'=\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta,\quad y'=\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta,$$

$$x''=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta-\rho\cos\theta,$$

$$y''=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\operatorname{sen}\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta.$$

Substituindo estes valores de x', y', x'', etc. na fórmula

$$\mathrm{R}=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''},$$

que resulta de substituir na expressão dada $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ pelos seus valores, tirados das fórmulas (1), vem

$$\mathrm{R}=\frac{\left(\rho^2+\frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+2\frac{d\rho^2}{d\theta^2}}.$$

85. Consideremos agora, a respeito da funcção de duas variaveis independentes

$$\mathrm{F}\left(x,\, y,\, z,\, \frac{\partial z}{\partial x},\, \frac{\partial z}{\partial y},\, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\, \dots\right),$$

as duas questões seguintes:

1.º *Substituir as variaveis independentes x e y por outras θ_1 e θ_2, ligadas com aquellas pelas equações*

$$\varphi(x,\, y,\, \theta_1,\, \theta_2)=0,\quad \psi(x,\, y,\, \theta_1,\, \theta_2)=0.$$

Por z ser funcção de x e y, e por x e y serem funcções de θ_1 e θ_2, temos

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta_1} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \theta_1^2},$$

. . . .

Substituindo n'estas equações as derivadas $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x}{\partial \theta_2}, \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y}{\partial \theta_2}, \frac{\partial^2 x}{\partial \theta_1^2}$, etc. pelos seus valores, tirados das equações que resultam de derivar $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ relativamente a θ_1 e θ_2, e resolvendo-as depois relativamente a $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, etc., temos os valores d'estas derivadas, em funcção de θ_1 e θ_2, que se devem substituir na expressão que se quer transformar.

2.º *Substituir as variaveis x, y e z por outras θ_1, θ_2 e ρ, ligadas com as primeiras pelas equações*

$$\varphi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0, \quad \psi(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0, \quad \omega(x, y, z, \theta_1, \theta_2, \rho) = 0.$$

Resolve-se este problema por meio das fórmulas anteriores, substituindo n'ellas $\frac{\partial z}{\partial \theta_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, \frac{\partial z}{\partial \theta_2}$, etc. pelos seus valores, tirados das equações $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 0$.

Exemplo. — Transformar a funcção

$$\mathrm{F}\left(x, \sqrt{a - x}, \frac{y \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \dfrac{\partial z}{\partial y}}{y} \right),$$

suppondo as novas variaveis ligadas com as antigas pelas equações

$$x^2 + y^2 = \theta_1, \quad a - x = \theta_2^2.$$

Derivando estas equações relativamente a θ_1 e θ_2, vem

$$2x \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + 2y \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = 1, \quad x \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + y \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -2\theta_2;$$

o que dá

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1}=0,\ \frac{\partial x}{\partial \theta_2}=2\theta_2,\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1}=\frac{1}{2y},\ \frac{\partial y}{\partial \theta_2}=-\frac{2x\theta_2}{y}.$$

Temos pois

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_1}=\frac{1}{2y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial \theta_2}=2\theta_2\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{2x\theta_2}{y}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Substituindo na expressão proposta os valores de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ tirados d'estas equações, vem uma expressão da fórma

$$f\left(\theta_2,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_2}\right),$$

em que só entra uma derivada e em que não entra radical [1].

---

[1] As fórmulas para a mudança da variavel independente, no caso das funcções de uma variavel, foram dadas pela primeira vez no *Traité des infiniment petits* de L'Hospital. Os outros problemas de que vimos de nos occupar n'este numero e no precedente foram considerados por Euler nas suas *Institutiones calculi differentialis*.

CAPITULO III

Applicações geometricas dos principios precedentes

I

Curvas planas

86. *Tangentes e normaes*. — I. Seja $F(x, y) = 0$ a equação de uma curva dada, referida a coordenadas rectangulares. A *tangente* a esta curva no ponto (x, y) passa por este ponto e o seu coefficiente angular é egual a $\frac{dy}{dx}$ (n.º 58-I); logo a equação d'esta recta é (representando por X e Y as coordenadas dos seus postos):

$$(1) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

ou, substituindo $\frac{dy}{dx}$ pelo seu valor, tirado da equação da curva,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = 0.$$

II. A recta perpendicular á tangente, tirada pelo ponto de contacto, diz-se *normal á curva* n'este ponto, e a sua equação é

$$X - x = -\frac{dy}{dx}(Y - y)$$

o

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

*

A respeito da normal resolveremos aqui o problema seguinte:

Determinar o limite para que tende a intersecção das normaes á curva nos pontos (x, y) *e* $x+h,\ y+k)$, *quando o segundo ponto tende para o primeiro.*

As equações das duas normaes são

$$X - x = -f'(x)(Y - y),$$

$$X - x - h = -f'(x+h)(Y - y - k),$$

e a segunda dá, attendendo á primeira e á relação (n.º 55)

$$f'(x+h) = f'(x) + h\, f''(x) + \varepsilon,$$

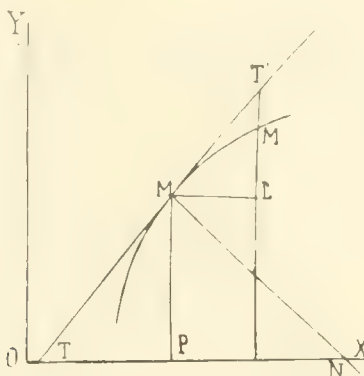
onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h,

$$h = h\left[f''(x) + \varepsilon\right](Y - y - k) - k\, f'(x).$$

Temos portanto, dividindo por h e depois fazendo tender h para zero, as fórmulas

$$\text{(2)} \qquad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad X - x = -y'\,\frac{1 + y'^2}{y''}$$

que determinam as coordenados (X, Y) do ponto pedido.

III. Dão-se respectivamente os nomes de *subtangente, subnormal, comprimento da tan-*

gente e *comprimento da normal* aos segmentos de recta TP, PN, TM e NM, determinados

pela tangente e pela normal. A resolução dos triangulos MTP e MNP dá, para determinar o valor d'estes segmentos, as fórmulas seguintes (θ representando o angulo MTX):

$$\text{subtangente} = \frac{y}{\operatorname{tang}\theta} = y\frac{dx}{dy},$$

$$\text{subnormal} = y \operatorname{tang}\theta = y\frac{dy}{dx},$$

$$\text{tangente} = \sqrt{y^2 + \text{TP}^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$\text{normal} = \sqrt{y^2 + \text{NP}^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Faz-se muito uso d'estas expressões para construir as tangentes e as normaes ás curvas.

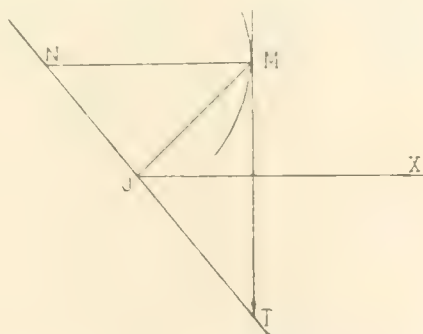
IV. O angulo ω da recta OM, que une a origem das coordenadas a um ponto M da curva, e da tangente MT á curva n'este ponto é dado pela fórmula

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y' - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}y'} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy},$$

visto que y' e $\dfrac{y}{x}$ são os valores dos coefficientes angulares das duas rectas.

Em coordenadas polares temos, pondo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta$,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\rho d\theta}{d\rho}.$$

Tirando pela origem O das coordenadas uma recta NT, perpendicular a OM, e traçando

a tangente MT e a normal MN á curva no ponto M, formam-se dois triangulos rectangulos,

cujos lados OT, ON, MT e MN são conhecidos pelos nomes de *subtangente polar, subnormal polar, tangente polar* e *normal polar*.

Resolvendo os triangulos considerados e notando que é OMT $= \omega$ e OM $= \rho$, obtêem-se as fórmulas

$$\text{subt.} = \rho \operatorname{tang} \omega = \frac{\rho^2 d\theta}{d\rho}, \quad \text{subn.} = \rho \cot \omega = \frac{d\rho}{d\theta},$$

$$\text{tang.} = \rho \sqrt{1 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}, \quad \text{norm.} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

V. Á equação da tangente dá-se muitas vezes, principalmente no caso das curvas algebricas, uma fórma que vamos ver.

É evidente que, mudando na equação da curva x e y em $\frac{x}{z}$ e $\frac{y}{z}$, podemos representar a curva proposta pelas equações

$$F(x, y, z) = 0, \quad z = 1,$$

$F(x, y, z)$ representando uma funcção homogenea de x, y e z. A equação da tangente póde tambem ser escripta debaixo da fórma

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

onde $Z = z = 1$.

Temos porém (n.° 70)

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z = n F(x, y, z) = 0.$$

Logo podemos dar á equação da tangente a fórma

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} X + \frac{\partial F}{\partial y} Y + \frac{\partial F}{\partial z} Z = 0,$$

onde, depois de formar as derivadas, se deve pôr $Z = z = 1$.

VI. A theoria das tangentes e das normaes ás curvas dá logar a muitos problemas importantes; mencionaremos aqui os seguintes:

1.° *Por um ponto* (a, b), *exterior a uma curva dada, tirar tangentes a esta curva.*

Para resolver este problema, temos de eliminar x e y entre a equação da curva e a equação

$$\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial y} b + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

que exprime que as tangentes passam pelo ponto dado. Os systemas de valores que estas equações dão para x e y, são as coordenadas dos pontos de contacto.

Considerando x e y como variaveis, a ultima equação representa uma curva, que passa pelos pontos de contacto da curva dada com as tangentes tiradas pelo ponto (a, b). A esta curva chama-se *polar* do ponto (a, b) relativamente á curva dada.

Se a curva proposta for algebrica de ordem n, a sua polar é tambem algebrica de ordem $n - 1$, visto que as derivadas de $F(x, y, z)$ relativamente a x, y e z são do grau $n - 1$. N'este caso, estas duas curvas não podem cortar-se em mais do que $n(n-1)$ pontos; e portanto *por um ponto exterior a uma curva algebrica não se podem tirar mais do que $n(n-1)$ tangentes a esta curva* [1].

2.º *Achar a condição para que a recta*

$$AX + BY + CZ = 0, \quad Z = 1,$$

seja tangente a uma curva dada.

Para que a recta representada por esta equação coincida com a recta representada pela equação (A), é necessario e sufficiente que seja

$$\frac{\partial F}{\partial x} : A = \frac{\partial F}{\partial y} : B = \frac{\partial F}{\partial z} : C.$$

Eliminando pois x e y entre estas equações e a equação $F(x, y) = 0$ da curva, obtem-se a equação de condição para que a recta dada seja tangente á curva. Se esta equação for satisfeita, as duas equações anteriores dão depois a coordenadas x e y dos pontos de contacto.

3.º *Tirar as tangentes communs a duas curvas dadas.*

Sejam $F(x, y, z) = 0$, $\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$ as equações das curvas dadas. A equação geral das tangentes á primeira é dada pela fórmula (A). Basta pois procurar a condição para que esta equação coincida com a equação

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} Y + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} Z = 0.$$

---

[1] A respeito do caso em que o ponto está sobre a curva pode ver-se um artigo que publicámos em *L'Enseignement mathématique*, Genève, tom. VIII.

para resolver o problema. Temos assim as equações

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial z_1},$$

que, juntamente com as equações das curvas dadas, determinam as coordenadas x, y, x_1, y_1 dos pontos de contacto da tangente com as duas curvas.

4.º *Tirar uma normal a uma curva dada por um ponto exterior* (a, b).

A condição para que a normal passe pelo ponto (a, b) é

$$\frac{a-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{b-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Por meio d'esta equação e da proposta obtêem-se as coordenadas (x, y) dos pontos em que as rectas pedidas são normaes á curva.

Se a proposta for uma curva algebrica de ordem n, a equação anterior é tambem do grau n, e vê-se por isso que o *numero das normaes que se podem tirar a uma curva por um ponto exterior não póde ser superior a* n^2.

5.º *Procurar o logar geometrico dos pés das perpendiculares ás tangentes a uma curva dada, tiradas por um ponto fixo.*

Tomando este ponto para origem das coordenadas, obtem-se a equação da curva procurada eleminando x e y entre a equação da curva dada e as seguintes:

$$Y - y = y'(X - x), \quad y'Y + X = 0,$$

que representam a tangente e a perpendicular a esta recta, tirada pela origem das coordenadas. A curva que vem de definir-se chama-se *pedaria* da curva dada.

87. *Fócos das curvas.* — Generalisando a noção de *fóco*, dada na theoria das conicas, Plücker (¹) deu este nome aos pontos do plano de uma curva pelos quaes se lhe podem tirar duas tangentes cujos coefficientes angulares sejam eguaes a $+i$ e $-i$, i representando $\sqrt{-1}$.

Para obter estas tangentes, determine se a constante C, que entra na equação

$$Y \pm iX + C = 0,$$

por meio da que resulta de eliminar x e y entre a equação da curva dada e as seguintes (n.º 86-VI, 2.º):

$$F'_x(x, y, z) : \pm i = F'_y(x, y, z) : 1 = F'_z(x, y, z) : C.$$

(¹) *Jornal de Crelle*, tom. x, 1833.

Obtidas assim as equações das tangentes que têem para coefficiente angular i e $-i$, basta procurar os pontos em que as primeiras cortam as segundas, para determinar os fócos da curva dada.

Consideremos, por exemplo, a ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 z^2 = 0.$$

Temos

$$+\frac{b^2 x}{i} = a^2 y \quad -\frac{a^2 b^2}{C},$$

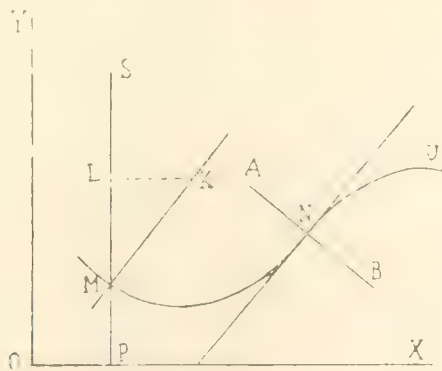
e, eliminando x e y entre estas equações e a da curva, $C^2 = b^2 - a^2$.

Logo as equações das tangentes pedidas são

$$Y = iX \pm \sqrt{a^2 - b^2}, \quad Y = -iX \pm \sqrt{a^2 - b^2},$$

e as duas primeiras cortam as duas ultimas em quatro pontos, dois reaes e dois imaginarios, que são os fócos da curva considerada. As coordenadas dos primeiros são $(0, \pm \sqrt{a^2 - b^2})$, o que concorda com o que se viu na theoria das conicas.

A noção geral de *fóco*, que vimos de dar, tem uma grande importancia na theoria das curvas algebricas.

88. *Concavidade e convexidade.* — Consideremos um arco de curva e pelo ponto M (x, y) d'este arco tiremos a normal MK, que se estende indefinidamente em duas direcções oppostas. Se as normaes nos pontos do arco, visinhos de M e situados de ambos os lados d'este ponto,

cortarem todas a normal MK em pontos situados n'uma mesma direcção, diz-se que o arco considerado tem, na visinhança do ponto M, a sua *concavidade* voltada no sentido MK e a sua *convexidade* voltada no sentido opposto.

O sentido da concavidade determina-se pois pela posição do ponto (X, Y), dado pelas fór-

mulas (2), visto que estas fórmulas dão o ponto para que tendem as intersecções da normal á curva no ponto (x, y) com as normaes nos pontos visinhos, quando estes pontos tendem para (x, y).

Diz-se que um arco tem, na visinhança do ponto M, a sua concavidade voltada no sentido MS, quando esta direcção fórma um angulo agudo com a direcção MK da normal, no sentido da qual está voltada a concavidade.

Se a direcção dada é a das ordenadas positivas, para que esta direcção forme um angulo agudo com a direcção da normal que contem o ponto (X, Y), deve este ponto estar evidentemente acima de uma parallela ao eixo das abscissas, tirada pelo ponto (x, y), e portanto deve ser $Y > y$. A primeira das fórmulas (2) mostra que isto tem logar todas as vezes que y'' é positivo.

Vê-se do mesmo modo que a concavidade está voltada no sentido das ordenadas negativas quando y'' é negativo.

Podemos pois enunciar o theorema seguinte:

A curva volta a sua concavidade no sentido das ordenadas positivas ou das negativas, na visinhança de um ponto dado, no qual as derivadas y' e y'' são finitas, segundo a derivada y'' é positiva ou negativa n'este ponto.

I. Se nos pontos visinhos do ponto N, collocados de um dos lados d'este ponto, a concavidade está voltada n'um sentido NA e nos pontos visinhos, collocados do outro lado, está voltada no sentido opposto NB, diz-se que N é um *ponto de inflexão.*

D'esta definição e do theorema anterior resulta immediatamente o theorema seguinte:

E condição necessaria e sufficiente para que um ponto (x, y), no qual as derivadas y' e y'' são finitas, seja ponto de inflexão, que y'' mude n'este ponto de signal.

Funda-se n'este theorema a indagação dos pontos de inflexão, como adiante veremos [1].

89. *Asymptotas.* — Uma recta diz-se *asymptota* de um ramo infinito de uma curva, se a distancia de um ponto do ramo da curva á recta tende para zero, quando o ponto se affasta indefinidamente sobre a curva.

Para achar as asymptotas não parallelas ao eixo das ordenadas dos ramos das curvas planas, basta determinar as constantes a e b, que entram na equação

$$y = ax + b,$$

de modo que a differença entre as ordenadas y e Y da recta e da curva, correspondentes á

[1] A determinação dos pontos de inflexão das curvas planas é um dos problemas a que os inventores do calculo infinitesimal applicaram a sua descoberta. Anteriormente tinha sido o referido problema methodicamente estudado por Sluse na 2.ª edição do seu *Mesolabium*, publicado em 1668, e tinham sido obtidos, por processos particulares, por Huygens, Descartes, etc. os pontos de inflexão de algumas curvas especiaes notaveis.

mesma abscissa, tenda para zero, quando x tende para o infinito. Para isso é necessario e basta que seja

$$Y = ax + b + v,$$

representando por v uma funcção de x que tenda para zero, quando x tende para o infinito.

Temos pois, pondo $Y = zx$ e $Y = ax + u$,

$$\lim z = \lim \frac{Y}{x} = a + \lim \frac{b+v}{x} = a,$$

$$\lim u = \lim (Y - ax) = b + \lim v = b;$$

e vê-se portanto que, para determinar a, basta substituir Y por zx na equação proposta e procurar depois o limite para que tende z, quando x tende para o infinito; e que, para determinar b, basta substituir Y por $ax + u$ na equação proposta e procurar depois o limite para que tende u, quando x tende para o infinito. Devemos observar que é necessario e sufficiente para que o ramo da curva do qual a recta que vimos de achar é asymptota, seja real, que sejam reaes os valores pelos quaes passa u, quando tende para b.

A equação de qualquer asymptota parallela ao eixo das ordenadas é $x = \alpha$, onde α representa evidentemente o limite para que tende a abscissa do ramo da curva considerado, quando y tende para o infinito [1].

Exemplos. 1.º Appliquemos primeiramente este methodo á equação

$$y^2 = 2kx + mx^2,$$

que representa todas as conicas.

Pondo, para isso, $y = zx$, vem

$$z^2 - m - 2kx^{-1} = 0,$$

e portanto, fazendo tender x para $\pm \infty$,

$$a = \lim z = \pm \sqrt{m}.$$

Pondo em seguida $y = \pm \sqrt{m}x + u$, vem a equação

$$\pm 2\sqrt{m}\,u - 2k + u^2 x^{-1} = 0,$$

[1] A origem da theoria das asymptotas encontra-se na *Enumeratio linearum tertii ordinis* de Newton, publicada em 1706. Foi continuada por Stirling e Nicole, em trabalhos consagrados á demonstração dos resultados enunciados n'esta obra celebre, e depois por De Gua na obra intitulada *Usage de l'Analyse de Descartes* (1740), por Euler na sua *Introductio in Analysin infinitorum*, já mencionada, por Cramer na sua notavel *Introduction à l'Analyse des lignes courbes* (1750), etc.

*

que determina uma funcção u de x^{-1}, que tende para $\pm \frac{k}{\sqrt{m}}$ (além de outra que tende para o infinito), quando x^{-1} tende para zero.

Logo as equações das asymptotas pedidas são

$$y = \pm \sqrt{m}\left(x - \frac{k}{m}\right),$$

e são reaes quando $m > 0$, isto é, no caso de hyperbole, imaginarias quando $m < 0$, isto é, no caso da ellipse, e estão situados no infinito quando $m = 0$, isto é, no caso da parabola.

2.º A equação

$$y = x \pm \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

dá, pondo $y = zx$ e depois $x = \pm \infty$, $\lim z = 1$, e, pondo $y = x + u$ e $x = \pm \infty$, $\lim u = \pm 1$; logo a curva correspondente admitte as asymptotas

$$y = x + 1, \quad y = x - 1.$$

Quando x tende para 0, y tende para $\pm \infty$; logo a recta $x = 0$ é tambem asymptota da curva.

3.º Consideremos finalmente a equação

$$hxy^2 + kxy + ly^2 + my = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

que pode representar todas as *cubicas*, escolhendo-se convenientemente os eixos das coordenadas.

Pondo primeiramente na equação dada $y = zx$, vem

$$hz^2 - a + (lz^2 + kz - b)\, x^{-1} + (mz - c)\, x^{-2} - dx^{-3} = 0,$$

e portanto, fazendo $x = \pm \infty$,

$$hz^2 - a = 0.$$

Pondo depois na mesma equação

$$y = \sqrt{\frac{a}{h}}\, x - u$$

e ordenando segundo as potencias de x^{-1}, vem um resultado da fórma

$$2\sqrt{ahu} - b + k\sqrt{\frac{a}{h}} + \frac{la}{h} + Mx^{-1} + Nx^{-2} = 0,$$

que, para $x = \pm\infty$, dá

$$2\sqrt{ahu} - b \pm k\sqrt{\frac{a}{h}} + \frac{la}{h} = 0.$$

As rectas representadas pelas equações

$$y = \pm\sqrt{\frac{a}{h}}\left(x + \frac{bh - la}{2ah}\right) - \frac{k}{2h}$$

são pois asymptotas da curva; e estas asymptotas são reaes quando a e h têem o mesmo signal, imaginarias no caso contrario, e as suas distancias á origem tendem para o infinito, quando h tende para zero.

Escrevendo a equação proposta debaixo da fórma

$$hx + l + (kx + m)y^{-1} = (ax^3 + bx^2 + cx + d)y^{-2}$$

e, pondo $y = \infty$, vê-se que a curva tem uma terceira asymptota, parallela ao eixo das ordenadas, cuja equação é

$$hx + l = 0,$$

quando h e l não são simultaneamente nullos, e que a distancia d'esta asymptota á origem tende para o infinito, quando h tende para zero.

Se é ao mesmo tempo $h = 0$ e $l = 0$, a equação da curva reduz-se á seguinte:

$$kx + m = (ax^3 + bx^2 + cx + d)y^{-1},$$

e vê-se que ainda existe uma asymptota parallela ao eixo das ordenadas, cuja equação é

$$kx + m = 0,$$

e que a distancia d'esta asymptota á origem tende para o infinito, quando k tende para zero.

I. Supponhamos que na equação da tangente

$$Y - y'X = y - xy'$$

a um ramo infinito de uma curva, no ponto (x, y), os parametros y' e $y-xy'$ tendem para os parametros a e b de uma recta $Y=aX+b$, quando x tende para o infinito. N'este caso a recta $Y=aX+b$ é asymptota da curva.

Para demonstrar este theorema, basta mostrar que $\frac{y}{x}$ e $y-ax$ tendem respectivamente para a e b, quando x tende para ∞.

Como y' e $y-xy'$ tendem para a e b, quando x tende para ∞, vê-se immediatamente que $\frac{y-xy'}{x}$ tende para 0, e portanto que $\frac{y}{x}$ tende para a.

Em segundo logar temos, pondo $x=t^{-1}$ e $y=f(x)$, applicando o theorema 3.º do n.º 64 á funcção $f(t^{-1})t-a$, pondo para isso no referido theorema $x_0=0$, $h=t$ e notando que esta funcção é nulla quando $t=0$ (por ser egual a $x^{-1}y-a$),

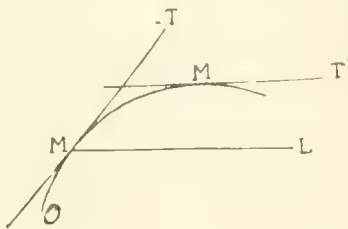
$$\lim_{x=\infty}(y-ax)=\lim_{t=0}\frac{f(t^{-1})t-a}{t}=\lim_{t=0}\{f[(\theta t)^{-1}]-f'[(\theta t)^{-1}](\theta t)^{-1}\}$$

$$=\lim_{t=0}[f(t^{-1})-f'(t^{-1})t^{-1}]=\lim_{x=\infty}(y-xy')=b.$$

90. *Curvatura.* — Chama-se *curvatura média de um arco de curva*, comprehendido entre os pontos M e M', a razão entre o angulo formado pelas tangentes MT e M'T' á curva nas extremidades do arco e o comprimento do arco.

Chama-se *curvatura da curva no ponto* M o limite para que tende a razão precedente, quando o arco tende para zero.

Sejam $y=f(x)$ a equação da curva em coordenadas rectangulares, θ o angulo das tan-

gentes nas extremidades do arco e l o comprimento do arco; a curvatura da curva no ponto M será egual a $\lim\frac{\theta}{l}$, e vamos determinal-a em funcção das coordenadas do ponto.

Representemos por ω o angulo formado pela tangente á curva n'este ponto com o eixo das abscissas e por s o comprimento do arco comprehendido entre uma origem fixa O, a partir da qual se contam os arcos, e o ponto M. Por ser egual a θ o valor absoluto do augmento, positivo ou negativo, que recebe o angulo que fórma a tangente com o eixo das abscissas,

quando se passa do ponto M para M', isto é, quando se muda s em $s+l$, temos, em virtude da definição de derivada,

$$curvatura = \lim \frac{\theta}{l} = \frac{d\omega}{ds}.$$

Obtida esta primeira expressão da curvatura, vamos deduzir d'ella uma outra, em funcção das coordenadas (x, y) do ponto M. Para isso, basta derivar a equação $y' = \tang \omega$ relativamente a x, o que dá

$$y'' = (1 + y'^2) \frac{d\omega}{dx};$$

e substituir na expressão precedente $d\omega$ e ds pelos seus valores, dados por esta equação e pela equação $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, o que dá

$$(3) \qquad curvatura = \frac{1}{R}, \quad R = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \pm \frac{N^3}{y^3 y''},$$

onde N representa (n.º 86-III) o comprimento da normal, e onde se deve empregar o signal a que corresponde um valor positivo de R, pois que se considera a curvatura como uma quantidade essencialmente positiva.

I. Applicando a fórmula precedente á circumferencia $x^2 + y^2 = r^2$, vem $R = r$; e portanto a curvatura da circumferencia é constante inversa do seu raio.

Se pelo ponto (x, y) da curva dada fizermos passar uma circumferencia, cujo centro esteja sobre a normal á curva n'este ponto, do lado para onde ella volta a concavidade, e cujo raio seja egual a R, esta circumferencia é tangente á curva e tem em toda a sua extensão a mesma curvatura que a curva considerada tem no ponto (x, y). Ao circulo assim obtido dá-se o nome de *circulo de curvatura da curva* no ponto (x, y). É facil obter as coordenadas (x_1, y_1) do centro d'este circulo, que se chama *centro de curvatura*.

Com effeito, por passar este circulo pelo ponto (x, y) e por ser o seu raio egual a R, temos

$$(4) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2};$$

e, por estar o seu centro sobre a normal á curva no ponto (x, y), temos

$$(5) \qquad x_1 - x = - y' (y_1 - y).$$

Eliminando x_1 e y_1 entre estas equações, obtêem-se as fórmulas

$$x_1 = x \mp y'\frac{1+y'^2}{y''}, \quad y_1 = y \pm \frac{1+y'^2}{y''},$$

que dão as coordenadas não só do centro de curvatura, collocado do lado para onde a curva volta a concavidade, mas tambem as do centro do circulo tangente á curva no ponto (x, y) e egual ao de curvatura, collocado do lado para onde ella volta a concavidade. Para distinguir quaes dos signaes das fórmulas precedentes correspondem ao centro de curvatura, basta comparal-as com as fórmulas (2) do n.º 86, que determinam um ponto (X, Y) para o qual está voltada a concavidade da curva. Vê-se assim que as coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas fórmulas

$$(6) \qquad x_1 = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}, \quad y_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

D'esta comparação conclue-se tambem, attendendo ao que se disse no n.º 86–II, que *o centro de curvatura da curva no ponto (x, y) é o limite para que tende a intersecção da normal á curva no ponto considerado com a normal n'um ponto infinitamente proximo, quando o segundo tende para o primeiro.*

II. Se, em logar da variavel independente x, quizermos empregar outra variavel t, ligada com x por uma relação dada, transformaremos as fórmulas (3) e (6) por meio das fórmulas (1) do n.º 84, e teremos

$$x_1 = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{y''x'-x''y'}, \quad y_1 = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{y''x'-x''y'}, \quad R = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x'-x''y'},$$

onde x' e y' representam agora as derivadas de x e y relativamente a t. A expressão de R em coordenadas polares foi dada no n.º 84.

III. A cada ponto (x, y) da curva proposta corresponde um centro de curvatura. Quando o ponto (x, y) descreve esta curva, o centro de curvatura descreve outra, cuja equação se acha eliminando x e y entre as equações (6) e a equação proposta. A esta ultima curva dá-se o nome de *evoluta* da curva dada, e a esta o nome de *evolvente* d'aquella. A respeito da relação entre a *evoluta* e a *evolvente* demonstraremos as duas proposições importantes seguintes:

1.ª *A normal a uma curva dada no ponto (x, y) é tangente á sua evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente.*

Com effeito, differenciando as equações (6), vem

$$dx_1 = dx - (1+y'^2)\,dx - y'd\frac{1+y'^2}{y''},$$

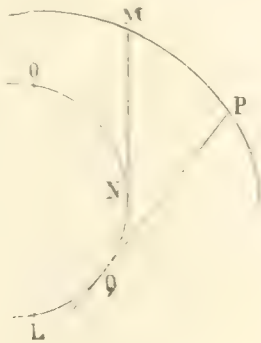
$$dy_1 = y'dx + d\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Multiplicando a segunda d'estas equações por y' e sommando o resultado com a primeira, obtem-se a equação

$$y'\frac{dy_1}{dx_1} + 1 = 0, \tag{7}$$

que, por ser y' o coefficiente angular da tangente á curva proposta no ponto (x, y) e $\frac{dy_1}{dx_1}$ o coefficiente angular da tangente á evoluta no ponto (x_1, y_1) correspondente, mostra que estas duas rectas são perpendiculares.

2.ª *A differença entre os raios de curvatura correspondentes a dois pontos de uma curva dada é egual ao comprimento do arco da evoluta comprehendido entre os seus respectivos centros de curvatura, quando entre os dois pontos o raio de curvatura cresce ou decresce sempre.*

Seja MP um arco da curva considerada, NQ o arco correspondente da evoluta e O um

ponto fixo, a partir do qual se contam os comprimentos dos arcos da evoluta. Chamando s_1 o comprimento do arco OQ, teremos

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2.$$

Differenciando a equação (4) e attendendo á equação (5), vem

$$(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 = -\,\mathrm{R}d\mathrm{R}.$$

A equação (7) dá tambem, eliminando y' por mèio de (5),

$$(x - x_1)\,dy_1 - (y - y_1)\,dx_1 = 0.$$

Elevando ao quadrado os dois membros das equações precedentes e sommando, vem

$$dx_1^2 + dy_1^2 = d\mathrm{R}^2.$$

Temos pois

$$\frac{ds_1}{dx} = \pm\frac{d\mathrm{R}}{dx},$$

onde se deve empregar o signal + ou —, segundo R e s_1 variam no mesmo sentido ou em sentido contrario no intervallo considerado (n.º 63).

No primeiro caso temos (n.º 64, th. 3.º-2.º), C representando uma constante,

$$s_1 = R + C,$$

e, do mesmo modo, chamando R_0 o raio MN e s_0 o comprimento do arco ON,

$$s_0 = R_0 + C;$$

e portanto

$$s_1 - s_0 = R - R_0.$$

No segundo caso (o da figura quando se toma o ponto L para origem dos arcos) vem do mesmo modo

$$s_0 - s_1 = R - R_0.$$

Resulta d'esta proposição que, se collocarmos sobre PQ um fio flexivel e inextensivel e o enrolarmos sobre QNO, fixando uma extremidade em Q e conservando-o sempre tenso, a outra extremidade P descreve uma evolvente de QNO. Esta propriedade das evolutas foi approveitada por Huygens para construir um pendulo que descreva uma curva dada qualquer; e foi mesmo esta questão de Mecanica que levou aquelle grande geometra á invenção da theoria que vem de ser considerada, da qual se occupou no seu admiravel tratado *De horelogio oscillatorio,* publicado em 1673, onde lhe consagrou um capitulo que é uma obra prima de geometria pura [1].

91. Exemplos [2]. I. Consideremos primeiro a parabola cuja equação é

$$y^2 = 2px.$$

1) A equação da tangente no ponto (x, y) é

$$y(Y - y) = p(X - x).$$

---

[1] A definição que Huygens deu de evoluta, é independente da consideração do circulo de curvatura. A noção de curvatura foi dada mais tarde por Leibnitz e Newton, e foi estudada principalmente por este ultimo geometra, pelo methodo das derivadas, no seu *Methodus Fluxionum.*

[2] Fazemos aqui applicação das doutrinas precedentes sómente ás conicas e á cycloide. Podem ver-se muitas outras applicações no nosso *Tratado de las curvas especiales notables*, publicado pela Academia das Sciencias de Madrid, onde são systematicamente estudadas as curvas mais notaveis pelas suas propriedades, pela sua historia ou pelas suas applicações.

2) As expressões da subtangente, da subnormal e da normal são

$$\text{subt} = 2x, \quad \text{subn} = p, \quad \text{norm} = \text{N} = \sqrt{2px + p^2}.$$

Resultam das duas primeiras egualdades meios faceis de construir a tangente e a normal á curva.

3) As fórmulas (3) e (6) dão as expressões do raio de curvatura e das coordenadas do centro de curvatura:

$$\text{R} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{(2px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{\text{N}^3}{p^2},$$

$$x_1 = x + \frac{p^2 + y^2}{p} = 3x + p,$$

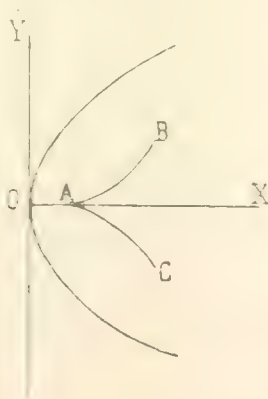
$$y_1 = y - \frac{(p^2 + y^2)\,y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

4) Eliminando x e y entre as duas ultimas equações e a da parabola, vem a equação da evoluta:

$$y_1^2 = \frac{8}{27p}(x_1 - p)^3,$$

que representa a curva de terceira ordem a que se dá o nome de *parabola semicubica*.

Esta equação mostra que a evoluta da parabola é formada por dois ramos, symetricamente dispostos relativamente ao eixo das abscissas, que partem do ponto A, cujas coorde-

nadas são $(p, 0)$, e se estendem indefinidamente no sentido das abscissas positivas, quando $p > 0$, ou no sentido das abscissas negativas, quando $p < 0$, affastando-se cada vez mais do

*

eixo das abscissas. A primeira das equações

$$y_1' = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27p}}(x_1 - p)^{\frac{1}{2}}, \quad y_1'' = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{27p}}(x_1 - p)^{-\frac{1}{2}}$$

mostra que no ponto $(p, 0)$ é $y_1' = 0$, e portanto que os dois ramos da curva são tangentes n'este ponto ao eixo das abscissas. A segunda mostra que, em cada ramo da curva, y_1'' tem um signal constante, e portanto que a curva não tem pontos de inflexão.

II. Consideremos em segundo logar a ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Temos

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

e portanto:

1) A equação da tangente á curva no ponto (x, y) é

$$a^2 y (Y - y) + b^2 x (X - x) = 0$$

ou

$$a^2 y Y + b^2 x X = a^2 b^2.$$

2) A expressão do raio de curvatura no ponto (x, y) é (n.º 90)

$$R = \frac{a^2 N^3}{b^4} = \frac{N^3}{p^2},$$

$2p$ representando o parametro.

Mudanda b em $b\sqrt{-1}$, vê-se que esta expressão de R tem tambem logar no caso da hyperbole. Comparando-a com a expressão do raio de curvatura da parabola, conclue-se que *em todas as secções conicas o raio de curvatura em um ponto dado é egual ao cubo do segmento da normal comprehendido entre este ponto e o eixo que contem os fócos, dividido pelo quadrado do semiparametro.*

As coordenadas do centro de curvatura são dadas pelas fórmulas

$$x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

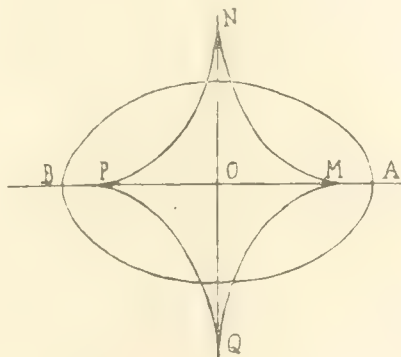
onde $c^2 = a^2 - b^2$.

3) A equação da evoluta acha-se eliminando x e y entre as ultimas equações e a da ellipse, o que dá

$$\left(\frac{by_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ax_1}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Como esta equação não se altera pela mudança de x_1 em $-x_1$ e de y_1 em $-y_1$, vê-se que a curva é composta de quatro ramos eguaes, symetricos relativamente aos eixos coordenados. Basta portanto, para conhecer a sua fórma, discutir o ramo correspondente ás coordenadas positivas, para o que se deve attender á equação da curva e ás egualdades

$$y_1' = -\left(\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y_1'' = -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{y_1' x_1 - y_1}{x_1^2}\right).$$

1.° A curva corta o eixo das abscissas positivas no ponto $\left(+\frac{c^2}{a}, 0\right)$, e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y_1' = 0$ quando $y_1 = 0$.

2.° Quando x_1 diminue, y_1 augmenta e a curva affasta-se do eixo das abscissas, conservando sempre a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, visto que y_1'' é positivo.

3.° A curva corta o eixo das ordenadas positivas no ponto $\left(0, \frac{c^2}{b}\right)$, e n'este ponto é tangente a este eixo, visto que é $y_1' = \infty$ quando $x_1 = 0$.

4.° Quando o valor absoluto de x_1 é maior de que $\frac{c^2}{a}$, y_1 é imaginario. Logo a estes valores de x_1 não correspondem pontos da curva. Do mesmo modo aos valores de y_1 maiores do que $\frac{c^2}{b}$ não correspondem pontos da curva.

III. Chama-se *cycloide* a curva gerada pelo ponto M de uma circumferencia que róla, sem escorregar, sobre uma recta dada OB.

D'esta definição resulta immediatamente que a curva é composta de um numero infinito de arcos eguaes a ODB, que este arco tem um eixo de symetria DE, egual ao diametro do circulo gerador, e que OB é egual ao comprimento da circumferencia do mesmo circulo.

Para achar a equação da curva, consideremos um ponto qualquer M, correspondente á posição C do centro do circulo gerador, e, tomando OB para eixo das abscissas e a perpendicular a esta recta, tirada por O, para eixo das ordenadas, exprimamos as coordenadas (x, y) do ponto M em funcção do angulo MCQ, formado por MC com a recta CQ, perpendicular a OB. Para isso, notemos que é, por definição, t representando o angulo MCQ e r o raio da circumferencia geradora,

$$\text{OQ} = \text{arco MQ} = rt;$$

e portanto

$$x = \text{OP} = \text{OQ} - \text{PQ} = r(t - \text{sen}\, t),$$

$$y = \text{MP} = \text{CQ} - \text{CF} = r(1 - \cos t).$$

Estas duas equações determinam todos os pontos do arco ODB, dando a t todos os valores desde 0 até 2π, e dariam, pela eliminação de t, a equação da curva; mas vamos estudal-a sem fazer esta eliminação.

1) A equação da normal é, tomando t para variavel independente,

$$\frac{dy}{dt}(\text{Y} - y) + \frac{dx}{dt}(\text{X} - x) = 0,$$

onde

$$\frac{dx}{dt} = r(1 - \cos t) = y, \; \frac{dy}{dt} = r\,\text{sen}\, t.$$

Para achar a sua intersecção com o eixo das abscissas, façamos $\text{Y} = 0$, o que dá

$$ry\,\text{sen}\, t = (\text{X} - x)\, y.$$

e portanto

$$X = x + r \operatorname{sen} t = OP + PQ = OQ.$$

Logo *a normal á cycloide n'um ponto dado* M *passa pelo ponto* Q *onde o circulo gerador correspondente toca a recta sobre que gira* (Descartes).

2) O comprimento da normal é dado pela fórmula

$$N^2 = y^2 + PQ^2 = y^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 t,$$

e vem portanto

$$N = r\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2r \operatorname{sen} \frac{t}{2}.$$

3) A ultima fórmula do n.° 90–II, pondo

$$x' = r(1 - \cos t),\ x'' = r \operatorname{sen} t,\ y' = r \operatorname{sen} t,\ y'' = r \cos t,$$

dá a expressão seguinte do raío de curvatura:

$$R = 2r\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2N,$$

a qual mostra que *o raio de curvatura* MM_1 *é egual ao dobro do comprimento* MQ *da normal.*

As coordenadas (x_1, y_1) do centro de curvatura M_1, isto é, OS e M_1S, obtêem-se immediatamente como consequencia da egualdade dos triangulos MPQ e M_1SQ, da qual resulta

$$M_1S = MP,\ OS = OQ + QS = OQ + PQ,$$

e portanto

$$x_1 = r(t + \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(-1 + \cos t).$$

Estas equações dão, pela eliminação de t, a equação da evoluta da cycloide.

4) Como t é variavel independente, podemos n'estas equações mudar t em $t + \pi$, sem alterar a natureza da curva que ellas representam, e vem

$$x_1 = r(t + \pi - \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(-1 - \cos t).$$

Mudando depois a origem das coordenadas para o ponto O_1, cujas ordenadas são $(\pi r, -2r)$, isto é, mudando x_1 em $x_1 + \pi r$ e y_1 em $y_1 - 2r$, vêem as equações

$$x_1 = r(t - \operatorname{sen} t),\ y_1 = r(1 - \cos t).$$

d'onde se conclue que *a evoluta da cycloide é outra cycloide, egual á primeira, cujo circulo gerador róla sobre uma recta* KL, *parallela a* OB, *tirada pelo ponto* O_1, *e cujo ponto gerador parte de* O_1 (Huygens).

II

Curvas no espaço

92. *Tangentes e normaes.* — Consideremos a curva representada pelas equações

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

I. A *tangente* a esta curva no ponto (x, y, z) define-se, como no caso das curvas planas, como limite das posições que toma a secante que passa pelo ponto (x, y, z) e pelo ponto infinitamente proximo $(x+h, y+k, z+l)$, quando o segundo ponto tende para o primeiro.

Como a secante considerada passa pelos dois pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$, as suas equações são (chamando X, Y, Z as suas coordenadas correntes)

$$Y - y = \frac{k}{h}(X - x), \quad Z - z = \frac{l}{h}(X - x);$$

e portanto as equações da tangente são

$$\left\{\begin{aligned} Y - y &= \frac{dy}{dx}(X - x), \\ Z - z &= \frac{dz}{dx}(X - x). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

As derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ são dadas pelas equações da curva

Substituindo nas equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0, \tag{A}$$

$\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ pelos valores dados pelas fórmulas (2), dá-se ás equações da tangente a fórma

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

II. Os cosenos dos angulos α, β, γ formados pela tangente á curva no ponto (x, y, z) com os eixos coordenados rectangulares são dados, em virtude de fórmulas bem conhecidas da Geometria Analytica, pelas equações

$$\text{(3)} \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

onde

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

III. Chama-se *plano normal á curva* no ponto (x, y, z) o plano que passa por este ponto perpendicularmente á tangente.

Applicando ás equações (2) as fórmulas, conhecidas de Geometria Analytica, que dão a equação do plano perpendicular a uma recta dada, vem a equação do plano normal

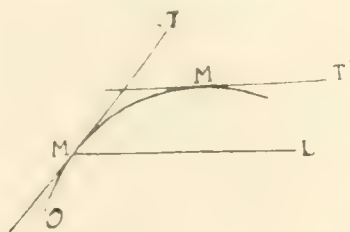
$$\text{(4)} \qquad (X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0,$$

onde X, Y e Z representam as coordenadas correntes do plano.

Eliminando $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ entre esta equação e as equações (A), póde ainda dar-se á equação do plano normal a fórma

$$\text{(4')} \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{dz} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Chama-se *normal á curva* no ponto (x, y, z) toda a recta que passa por este ponto e existe no plano normal.

IV. Chama-se *plano tangente á curva* no ponto M (x, y, z) todo o plano que passa pela

tangente á curva n'este ponto. Entre estes planos vamos especialmente considerar aquelle

para que tende o plano TML, que passa por esta tangente e por uma parallela á tangente á curva no ponto M', tirada pelo ponto M, quando aquelle ponto tende para este.

Tomando para variavel independente uma quantidade t, podemos representar a curva proposta pelas equações

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \pi(t),$$

que determinam as cordenadas dos pontos da curva em funcção de t.

A equação geral dos planos que passam pelo ponto (x, y, z) é

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

onde A, B e C são constantes arbitrarias. Vamos determinal-as pelas condições de o plano passar pela tangente á curva no ponto (x, y, z), cujas equações

$$\frac{X - x}{\varphi'(t)} = \frac{Y - y}{\psi'(t)} = \frac{Z - z}{\pi'(t)}$$

resultam das fórmulas (2), pondo n'ellas

$$dx = \varphi'(t)\,dt,\ dy = \psi'(t)\,dt,\ dz = \pi'(t)\,dt,$$

e pela recta representada pelas equações

$$\frac{X - x}{\varphi'(t + dt)} = \frac{Y - y}{\psi'(t + dt)} = \frac{Z - z}{\pi'(t + dt)},$$

a qual passa pelo ponto (x, y, z) e é parallela á tangente á curva no ponto M', correspondente ao valor $t + dt$ da variavel independente. Estas condições são

$$A\,\varphi'(t) + B\,\psi'(t) + C\,\pi'(t) = 0,$$

$$A\,\varphi'(t + dt) + B\,\psi'(t + dt) + C\,\pi'(t + dt) = 0,$$

ou (n.º 55)

$$A\,\varphi'(t) + B\,\psi'(t) + C\,\pi'(t) = 0,$$

$$A\,\varphi'(t) + B\,\psi'(t) + C\,\pi'(t) + A\,\varepsilon_1 + B\,\varepsilon_2 + C\,\varepsilon_3 = 0,$$

onde ε_1, ε_2 e ε_3 representam quantidades infinitamente pequenas com dt.

Eliminando A, B e C entre ellas e a equação do plano e fazendo tender dt para zero, vem a equação

$$\begin{vmatrix} X-a & Y-b & Z-c \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

que representa o plano procurado. A este plano dá-se o nome de *plano osculador* da curva no ponto (x, y, z).

Desenvolvendo este determinante, póde escrever-se a equação do plano osculador do modo seguinte:

$$(5) \quad \begin{cases} (z'y'' - y'z'')(X-x) + (x'z'' - z'x'')(Y-y) \\ + (y'x'' - x'y'')(Z-z) = 0. \end{cases}$$

93. *Curvatura e torsão.* — Consideremos uma curva no espaço, representada como anteriormente, pelas equações:

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \pi(t).$$

Se pelo ponto (x, y, z) fizermos passar uma recta de direcção determinada, dependente da posição do ponto, de modo que, chamando a, b e c os cosenos dos angulos formados por ella com os eixos coordenados, seja

$$a = f_1(t), \; b = f_2(t), \; c = f_3(t),$$

os cosenos a', b', c' dos angulos formados com os mesmos eixos pela recta correspondente, que passa pelo ponto $(x+h, y+k, z+l)$, serão dados (n.º 55) pelas fórmulas

$$a' = f_1(t+dt) = f_1(t) + dt\,[f_1'(t) + \varepsilon_1],$$
$$b' = f_2(t) + dt\,[f_2'(t) + \varepsilon_2],$$
$$c' = f_3(t) + dt\,[f_3'(t) + \varepsilon_3],$$

onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3 são quantidades infinitamente pequenas com dt.

Posto isto, procuremos o limite para que tende a razão do angulo formado pelas duas rectas para o comprimento do arco λ comprehendido entre os pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$, quando o segundo pondo tende para o primeiro.

*

Chamando θ o angulo formado pelas duas rectas, temos

$$\operatorname{sen}\theta = \left[(cb' - bc')^2 + (ac' - ca')^2 + (ba' - ab')^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo n'esta fórmula os valores de a', b' e c' achados precedentemente, representando para brevidade $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ por f_1, f_2 e f_3, e attendendo ás egualdades $\lim \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 1$ e (n.º 56) $\lim \frac{\lambda}{ds} = 1$, vem

$$\lim \frac{\theta}{\lambda} = \lim \frac{\operatorname{sen}\theta}{ds}$$

$$= \frac{\left[(f_3 f_2' - f_2 f_3')^2 + (f_1 f_3' - f_3 f_1')^2 + (f_2 f_1' - f_1 f_2')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{ds}{dt}}.$$

I. Supponhamos que as rectas dadas são as tangentes á curva nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$. Temos (n.º 92-II)

$$a = f_1(t) = \frac{x'}{s'},\quad b = f_2(t) = \frac{y'}{s'},\quad c = f_3(t) = \frac{z'}{s'},$$

representando por s', x', y', z' as derivadas de s, x, y, z relativamente a t, e

$$f_1' = \frac{x'' s' - s'' x'}{s'^2},\quad f_2' = \frac{y'' s' - s'' y'}{s'^2},\quad f_3' = \frac{z'' s' - s'' z'}{s'^2},$$

onde

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Logo, chamando ω o angulo formado pelas duas tangentes consideradas, virá

$$\lim \frac{\omega}{\lambda} = \frac{\left[(z' y'' - y' z'')^2 + (x' z'' - z' x'')^2 + (y' x'' - x' y'')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[x'^2 + y'^2 + z'^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\lim \frac{\omega}{\lambda} = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}}{s'^3}, \tag{6}$$

pondo

$$A = z' y'' - y' z'',\ B = x' z'' - z' x'',\ C = y' x'' - x' y''.$$

Ao limite, dado por esta fórmula, para que tende a razão do angulo formado pelas tangentes á curva dada nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes pontos, quando o segundo ponto tende para o primeiro, dá-se o nome de *curvatura da curva no ponto* (x, y, z); a ω dá-se o nome de *angulo de contingencia;* e a $\lim \frac{k}{\omega}$ dá-se o nome de *raio de curvatura.* Esta fórmula contem evidentemente a fórmula dada no n.º 90 para determinar a curvatura das curvas planas.

II. Supponhamos agora que as rectas dadas são as perpendiculares ao plano osculador. A equação d'este plano é (n.º 92-IV)

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

e, em virtude de fórmulas bem conhecidas de Geometria Analytica, temos

$$a=f_1(t)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$b=f_2(t)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$c=f_3(t)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Estas fórmulas dão

$$f_3 f_2'-f_2 f_3'=\frac{CB'-BC'}{A^2+B^2+C^2},$$

$$f_1 f_3'-f_3 f_1'=\frac{AC'-CA'}{A^2+B^2+C^2},$$

$$f_2 f_1'-f_1 f_2'=\frac{BA'-AB'}{A^2+B^2+C^2}.$$

Logo, chamando τ o angulo formado pelas perpendiculares aos planos osculadores nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$, temos a fórmula

$$\lim \frac{\tau}{k}=\frac{\left[(CB'-BC')^2+(AC'-CA')^2+(BA'-AB')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{(A^2+B^2+C^2)s}.$$

Pondo em logar de A, B, C e s' os seus valores e notando que é

$$CB'-BC'=Dx',\ AC'-CA'=Dy',\ BA'-AB'=Dz',$$

onde

$$D = Ax''' + By''' + Cz''' = - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

vem emfim

$$(7) \qquad \lim \frac{\tau}{k} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Ao limite, dado pela fórmula precedente, para que tende a razão do angulo formado pelos planos osculadores nos pontos (x, y, z) e $(x+h, y+k, z+l)$ para o comprimento do arco comprehendido entre estes dois pontos, quando o segundo ponto tende para o primeiro, dá-se o nome de *torsão da curva no ponto* (x, y, z); ao angulo τ dá-se o nome de *angulo de torsão;* ao $\lim \frac{k}{\tau}$ dá-se o nome de *raio de torsão;* e ás curvas cuja torsão é differente de zero, isto é, ás curvas que não são planas, dá-se o nome de *curvas de dupla curvatura* ou o de *curvas enviezadas.*

III. Tomando s para variavel independente, isto é, pondo $t = s$, póde dar-se á expressão da curvatura uma fórma muito simples. Substituindo, com effeito, em (6) A, B e C pelos seus valores, desenvolvendo os quadrados e attendendo ás egualdades

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2 = 1, \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

vem, substituindo no fim do calculo x'', y'', z'' por $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$,

$$(8) \qquad \lim \frac{\omega}{k} = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

IV. Exemplo. Consideremos a *helice* traçada sobre o cylindro de revolução, isto é, a curva gerada por um ponto que se move sobre a superficie de um cylindro recto de base circular, de modo que a sua distancia á base seja proporcional ao comprimento do arco da base comprehendido entre um ponto fixo e o pé da generatriz do cylindro que passa pelo ponto gerador.

Tomando o centro da base para origem das coordenadas, o eixo do cylindro para eixo dos z e chamando ρ o raio da base, as equações da curva são

$$x = \rho \cos t, \quad y = \rho \operatorname{sen} t, \quad z = at,$$

a representando uma constante, e dão

$$x' = -\rho \operatorname{sen} t, \; x'' = -\rho \cos t, \; x''' = \rho \operatorname{sen} t,$$
$$y' = \rho \cos t, \; y'' = -\rho \operatorname{sen} t, \; y''' = -\rho \cos t,$$
$$z' = a, \; z'' = 0, \; z''' = 0.$$

Logo temos as fórmulas

$$\lim \frac{\omega}{k} = \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}, \quad \lim \frac{\tau}{k} = \frac{a}{\rho^2 + a^2},$$

que determinam a curvatura e a torsão da helice traçada na superficie do cylindro considerado.

Vê-se por estas fórmulas que a *curvatura e a torsão da helice traçada sobre o cylindro de base circular são constantes* (1).

III

Superficies

94. *Plano tangente. Normal.* — Sejam $F(x, y, z) = 0$ a equação de uma superficie dada e $\varphi(x, y, z) =$ a equação de outra superficie qualquer, que passe por um ponto dado (x, y, z), situado sobre a primeira. As duas superficies cortam-se segundo uma curva, que passa pelo ponto considerado, e resulta do que se disse no n.º 92-I que uma das equações da tangente a esta curva no ponto (x, y, z) é

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Esta equação pertence a um plano e é independente da equação $\varphi(x, y, z) = 0$; portanto

(1) A applicação do methodo differencial ás curvas de dupla curvatura foi feita pela primeira vez por Clairault, o fundador da sua theoria geral, á qual consagrou em 1731 um livro notavel, intitulado *Traité des courbes à double courbure*, no qual se occupou das suas tangentes, da sua rectificação, da quadratura dos seus cylindros projectantes, etc. Os planos osculadores d'estas curvas foram considerados indirectamente por João Bernoulli e depois de um modo directo por Tinseau, em 1781, no tom. IX das *Mémoires des savants étrangers* da Academia das Sciencias de Paris, e a theoria da sua curvatura por Monge, em 1785, no tom. X da mesma collecção de memorias.

todas as tangentes ás curvas traçadas n'uma superficie, que passam pelo ponto (x, y, z), *estão situadas sobre um plano.* A este plano dá-se o nome de *plano tangente á superficie* no ponto (x, y, z).

Por ser, representando por p e q as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$(a) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0,$$

podemos ainda dar á equação do plano tangente a fórma

$$(9) \qquad Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

I. Se quizermos achar os pontos da superficie considerada em que os planos tangentes são parallelos a uma recta dada $x = az$, $y = bz$, temos de procurar os pontos d'esta superficie que satisfazem á equação de condição

$$(A) \qquad a \frac{\partial F}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

a qual exprime que o plano tangente é parallelo á recta dada.

Esta equação e a da superficie considerada determinam uma curva Δ, em todos os pontos da qual o plano tangente á superficie é parallelo á recta dada.

Se pelos pontos da curva Δ tirarmos parallelas á recta dada, estas parallelas formam um cylindro. Como o plano tangente á superficie $F(x, y, z) = 0$ n'um ponto da curva Δ é determinado pela parallela á recta dada, que passa pelo ponto considerado, e pela tangente á curva Δ no mesmo ponto, e como o plano tangente ao cylindro no ponto referido é determinado pelas mesmas rectas (visto que ambas são tangentes a linhas que estão sobre a superficie do cylindro), vê-se que *este cylindro é tangente á superficie ao longo da curva* Δ.

Escrevendo a equação (A) debaixo da fórma [para o que basta attender ás fórmulas (a)]:

$$ap + bq = 1,$$

vê-se que a equação ás derivadas parciaes das superficies cylindricas, obtida no n.º 75, exprime que os planos tangentes a estas superficies são todos parallelos a uma recta.

II. Os pontos de contacto da superficie $F(x, y, z) = 0$ com os planos tangentes que passam por um ponto dado (a, b, c), são determinados por esta equação e pela seguinte:

$$(B) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - c) = 0.$$

Estes pontos formam pois uma curva Δ, e vê-se, como anteriormente se viu no caso do cylindro, que o cone formado pelas rectas que passam pelos pontos d'esta curva e pelo ponto dado, é tangente á superficie considerada em todos os pontos de Δ.

Escrevendo a equação (B) debaixo da fórma

$$z - c = p(x - a) + q(y - b),$$

vê-se que a equação ás derivadas parciaes das superficies conicas (n.º 75) exprime que os planos tangentes a estas superficies passam todos pelo vertice.

III. As expressões dos cosenos dos angulos α, β, γ que o plano tangente fórma com os planos coordenados *xy, xz,* e *yz* são, em virtude de fórmulas bem conhecidas de Geometria Analytica:

$$\cos\alpha = K\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \cos\beta = K\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\gamma = K\frac{\partial F}{\partial x},$$

onde

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

IV. Chama-se *normal á superficie* no ponto (x, y, z) a perpendicular n'este ponto ao plano tangente. As suas equações são, em virtude das condições de perpendicularidade de uma recta a um plano, dadas na Geometria Analytica,

$$\text{(10)} \qquad \frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Estas equações podem ainda ser escriptas do modo seguinte:

$$\text{(10')} \qquad X - x = -p(Z - z), \quad Y - y = -q(Z - z).$$

V. A condição para que a normal a uma superficie corte a recta representada pelas equações

$$X = \alpha Z + k, \quad Y = \beta Z + l,$$

obtem-se eliminando X, Y e Z entre estas equações e as da normal, o que dá

$$(\alpha+p)(y-l+qz)=(\beta+q)(x-k+pz).$$

Vê-se pois que a equação ás derivadas parciaes das superficies de revolução, obtida no n.º 75, exprime que as normaes a esta superficie cortam o seu eixo. Acrescentaremos ainda que é geometricamente evidente que todas as normaes a estas superficies nos pontos do mesmo parallelo encontram o seu eixo no mesmo ponto.

95. *Curvatura das secções planas das superficies.* — I. A curvatura da secção feita n'uma superficie por um plano qualquer obtem-se pela fórmula geral dada no n.º 93-I. Aqui vamos procurar as relações que existem entre as curvaturas das secções feitas pelos planos que passam por um ponto dado da superficie, considerando primeiro as secções feitas pelos planos que passam pela normal á superficie no ponto dado, e em seguida as secções obliquas.

Seja $z=f(x, y)$ a equação da superficie. Ponhamos para brevidade

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

e representemos por p_0, q_0, r_0, s_0 e t_0 os valores que tomam p, q, r, s e t no ponto dado.

Para comparar a curvatura das secções feitas n'esta superficie pelos planos normaes que passam por um ponto dado, tomemos para eixo dos z a normal á superficie no ponto dado e para plano xy o plano tangente no mesmo ponto. N'este caso a equação do plano tangente é $Z=0$, e portanto, pondo na equação (9)

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ Z=0,$$

vê-se que temos $p_0=0$ e $q_0=0$.

Um plano qualquer que passe pela normal, tem para equação $y=Ax$, onde A representa a tangente trigonometrica do angulo θ formado por elle com o plano xz; e esta equação e a da superficie dão, representando por y', z', y'', z'' as derivadas de y e z relativamente a x,

$$y'=A,\ y''=0,\ z'=p+Aq,$$
$$z''=r+2As+A^2t,$$

e portanto, quando $x=0$, $y=0$, $z=0$,

$$y'=A,\ y''=0,\ z'=0,\ z''=r_0+2As_0+A^2t_0.$$

Substituindo estes valores na fórmula (6) do n.º 93 e pondo, a fim de tomar x para

variavel independente, $x' = 1$ e $x'' = 0$, vem a expressão seguinte da curvatura c_n da secção normal considerada:

$$c_n = \frac{r_0 + 2\,\mathrm{A}s_0 + \mathrm{A}^2 t_0}{1 + \mathrm{A}^2}, \tag{11}$$

convencionando considerar esta quantidade como positiva quando A satisfaz á condição $r_0 + 2\,\mathrm{A}s + \mathrm{A}^2 t_0 > 0$, cuja significação geometrica veremos adiante, e como negativa no caso contrario.

Derivando c_n relativamente a A, vem

$$c_n' = -\frac{2\,[s_0\,\mathrm{A}^2 - (t_0 - r_0)\,\mathrm{A} - s_0]}{(1 + \mathrm{A}^2)^2},$$

ou

$$c_n' = -\frac{2s_0\,(\mathrm{A} - m_1)\,(\mathrm{A} - m_2)}{(1 + \mathrm{A}^2)^2},$$

onde m_1 e m_2 representam as raizes da equação

$$s_0\,\mathrm{A}^2 - (t_0 - r_0)\,\mathrm{A} - s_0 = 0.$$

Vê-se pois que, quando A passa pelos valores m_1 e m_2, c_n' muda de signal, e portanto a curvatura c_n passa (n.º 63) de crescente a decrescente ou de decrescente a crescente, isto é, passa por um valor *maximo* ou por um valor *minimo*.

De ser $m_1 . m_2 = -1$ conclue-se que *as duas secções de curvatura maxima e minima são perpendiculares uma á outra.*

Tomando os planos d'estas duas secções para plano zx e zy, teremos de fazer na formula (11) $\theta = 0$ e $\theta = 90^\circ$, e portanto $\mathrm{A} = 0$ e $\mathrm{A} = \infty$, para obter as suas curvaturas, que designaremos por c_1 e c_2; o que dá $c_1 = r_0$ e $c_2 = t_0$. Vem pois

$$c_n = \frac{1}{1 + \mathrm{A}^2}\,c_1 + \frac{2\mathrm{A}}{1 + \mathrm{A}^2}\,s_0 + \frac{\mathrm{A}^2}{1 + \mathrm{A}^2}\,c_2.$$

Por outra parte, devendo ser uma das quantidades m_1 e m_2 egual a zero, a equação que determina os valores d'estas quantidades mostra que deve ser $s_0 = 0$. Logo

$$c_n = \frac{1}{1 + \mathrm{A}^2}\,c_1 + \frac{\mathrm{A}^2}{1 + \mathrm{A}^2}\,c_2$$

ou

$$c_n = c_1 \cos^2\theta + c_2 \operatorname{sen}^2\theta \tag{12}$$

Temos pois o seguinte theorema importante, publicado por Euler em 1760 nas *Memorias da Academia das Sciencias de Berlin,* com o qual este grande geometra deu principio á Geometria infinitesimal das superficies curvas:

Entre as secções feitas n'uma superficie por planos que passam por uma mesma normal, ha duas de curvaturas maxima ou minima, perpendiculares entre si; e a curvatura de qualquer d'ellas está ligada com a curvatura d'estas duas por meio da relação (12).

Ás secções de curvatura maxima e minima dá-se o nome de *secções principaes.*

D'este theorema deduzem-se os corollarios seguintes:

1.º *Se uma secção cuja curvatura é* $c_n^{(1)}$, *for perpendicular á secção cuja curvatura é* c_n, *temos*

$$c_n + c_n^{(1)} = c_1 + c_2.$$

Deduz-se este resultado sommando com a egualdade (12) a egualdade

$$c_n^{(1)} = c_1 \operatorname{sen}^2 \theta + c_2 \cos^2 \theta.$$

2.º *Se for* $c_1 = c_2$, *será a curvatura* c_n *constante, qualquer que seja o plano secante.* Aos pontos da superficie onde isto tem logar, dá-se o nome de *pontos umbilicaes.*

II. Para conhecer o sentido em que as secções planas que vimos de considerar, voltam a sua concavidade, na visinhança do ponto da superficie considerado, basta notar que, por ser

$$z_0'' = r_0 + 2As_0 + A^2 t_0 = r_0 + A^2 t_0,$$

a concavidade da secção normal que faz com o plano zx um angulo θ, está voltada (n.º 88) no sentido dos z positivos, quando é $r_0 + A^2 t_0 > 0$, e no sentido dos z negativos, quando é $r_0 + A^2 t_0 < 0$.

Logo, se r_0 e t_0 têem o mesmo signal, todas estas secções têem a sua concavidade voltada no mesmo sentido. Se r_0 e t_0 têem signaes contrarios, os dois valores de A dados pela egualdade $r_0 + A^2 t_0 = 0$, determinam dois planos, que separam as secções cuja concavidade está voltada no sentido em que z é positivo d'aquellas cuja concavidade está voltada no sentido em que z é negativo. No primeiro caso a superficie está toda do mesmo lado do plano tangente, na visinhança do ponto de contacto; no segundo caso a superficie corta o plano tangente na visinhança d'este ponto.

III. Continuemos a suppôr a superficie proposta referida ao plano tangente e aos planos das secções principaes, como planos coordenados, e comparemol-a com a superficie de segunda ordem cuja equação, referida aos mesmos planos coordenados, é

$$Z = \frac{r_0}{2} X^2 + \frac{t_0}{2} Y^2,$$

a qual passa pela origem das coordenadas, onde é tangente á superficie dada.

Por ser $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \, \partial Y} = 0$, os planos das secções principaes d'esta ultima superficie, relativos ao ponto (0, 0, 0), coincidem com os planos zx e zy, isto é, com os planos das secções principaes da superficie dada; e por ser $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = r_0$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = t_0$, as secções feitas nas duas superficies por um mesmo plano normal no ponto cosiderado têem a mesma curvatura n'este ponto e, na sua visinhança, a concavidade voltada no mesmo sentido.

Se cortarmos esta superficie por planos perpendiculares á normal considerada, obtêem-se curvas de segunda ordem, cujas equações são

$$r_0 X^2 + t_0 Y^2 = 2a, \quad Z = a,$$

semelhantes á curva representada pelas equações

$$r_0 X^2 + t_0 Y^2 = 1, \quad Z = 0.$$

A esta ultima curva chama-se a *indicatriz* da superficie $z = f(x, y)$ no ponto (0, 0, 0).

Se r_0 e t_0 têem o mesmo signal, a superficie de segunda ordem considerada é um *paraboloide elliptico* e a indicatriz é uma ellipse. Se r_0 e t_0 têem signaes contrarios, a superficie de segunda ordem considerada é um *paraboloide hyperbolico* e a indicatriz é uma hyperbole. No primeiro caso, os planos perpendiculares á normal á superficie $z = f(x, y)$ cortam a superficie de segunda ordem segundo ellipses reaes ou imaginarias. No segundo caso, estes planos cortam a superficie de segunda ordem segundo hyperboles, e as hyperboles correspondentes a dois planos equidistantes do ponto (0, 0, 0) considerado são conjugadas. Todas esta hyperboles têem as mesmas asymptotas, cujas equações são

$$r_0 X^2 + t_0 Y^2 = 0, \quad Z = 0.$$

O plano tangente á superficie no ponto (0, 0, 0) corta o paraboloide hyperbolico segundo estas rectas.

No caso de ser $r_0 = 0$ ou $t_0 = 0$, a indicatriz reduz-se a duas rectas parallelas e a superficie a um cylindro.

A indicatriz dá uma representação geometrica notavel dos raios de curvatura das secções normaes que passam por um mesmo ponto da superficie dada.

Referindo-a, com effeito, a coordenadas polares, pondo $X = \rho \cos \theta$, $Y = \rho \operatorname{sen} \theta$, vem

$$\frac{1}{\rho^2} = r_0 \cos^2 \theta + t_0 \operatorname{sen}^2 \theta = c_1 \cos^2 \theta + c_2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

e portanto $c_n = \rho^{-2}$. Logo o raio de curvatura de cada secção normal póde ser representado geometricamente pelo quadrado do raio da indicatriz pelo qual passa a secção considerada.

A consideração da indicatriz, que tanta luz dá á theoria da curvatura das secções normaes das superficies, é devida a Dupin, que lhe consagrou algumas paginas dos seus notaveis *Développements de Géométrie,* publicados em 1813.

IV. Consideremos agora uma secção feita na superficie considerada por um plano que passe pelo ponto (x, y, z), mas não contenha a normal á superficie n'este ponto.

Tomando para plano xy o plano tangente á superficie no ponto dado, para eixo dos x a intersecção do plano considerado com o plano tangente e para eixo dos z a normal, a equação do plano dado é

$$y = z \operatorname{tang} i = Bz,$$

chamando i o angulo formado por este plano com o plano normal zx. Teremos pois, em virtude d'esta equação e da equação da superficie, que suppomos referida aos mesmos eixos, tomando x para variavel independente,

$$y' = Bz', \; y'' = Bz'', \; z' = p + qy',$$
$$z'' = r + 2sy' + ty'^2 + qy'',$$

ou, pondo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e notando que p_0 e q_0 são nullos,

$$x' = 1, \; x'' = 0, \; y' = 0, \; y'' = Br_0, \; z' = 0, \; z'' = r_0.$$

Logo a curvatura c_0 da secção obliqua será (n.º 93-I) dada pela fórmula

$$c_0 = r_0(1 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r_0}{\cos i}.$$

Por outra parte a fórmula (11), pondo $\theta = 0$ ou $A = 0$, dá o valor r_0 para a curvatura c_n da secção feita na superficie pelo plano zx; logo temos

$$c_0 = \frac{c_n}{\cos i}.$$

Esta relação tão simples entre a curvatura de qualquer secção obliqua e a da secção normal que passa pela mesma tangente foi descoberta por Meusnier, que a publicou em 1785 nas *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des sciences de Paris.*

IV

Curvas e superficies envolventes

96. *Curvas envolventes.* — Consideremos a familia de curvas cuja equação é

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0,$$

onde a representa um parametro arbitrario.

Chama-se *envolvente* das curvas representadas por esta equação o logar geometrico dos pontos para que tendem as intersecções de cada uma d'ellas com uma outra, quando o valor do parametro correspondente a esta tende para o que corresponde áquella. As curvas representadas pela equação (1) chamam-se *envolvidas.*

Para achar a equação da envolvente, consideremos as duas curvas

$$f(x, y, a) = 0, \quad f(x, y, a + h) = 0,$$

correspondentes a dois valores do parametro.

Por ser (n.º 55)

$$f(x, y, a + h) = f(x, y, a) + h\left(\frac{\partial f}{\partial a} + \varepsilon\right),$$

ε representando uma quantidade que tende para zero, quando h tende para zero, as duas equações anteriores podem ser substituidas pelas equações

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} + \varepsilon = 0,$$

quando se procuram os pontos em que as curvas correspondentes ás primeiras se cortam. Quando h tende para zero, estes pontos tendem pois, em geral, para os pontos em que se cortam as curvas representadas pelas equações

$$(2) \qquad f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, a)}{\partial a} = 0,$$

as quaes determinam por isso pontos da envolvente.

Eliminando a entre estas equações, obtem-se o logar geometrico d'estes pontos, isto é, a equação da envolvente das curvas dadas.

A theoria geral das curvas envolventes foi considerada pela primeira vez por Leibnitz em um trabalho publicado no volume correspondente a 1694 das *Acta eruditorum* de Leipzig. Anteriormente tinham porém já sido consideradas por Huygens as envolventes das normaes ás curvas, as quaes, como vamos ver em seguida, coincidem com as suas evolutas.

I. Theorema. *A tangente á envolvente em um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando a primeira das equações (2), considerando a como funcção de x e y dada pela segunda, vem a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} y' \right) = 0,$$

que determina o coefficiente angular y' da tangente á envolvente no ponto (x, y). Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, esta equação reduz-se á seguinte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

que coincide com a que determina o coefficiente angular da tangente á envolvida que passa pelo ponto considerado. Logo as duas tangentes coincidem.

Convem observar que, para se poder tirar esta conclusão, é necessario excluir os pontos cujas coordenadas annulam simultaneamente $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

97. Applicações. — I. Para fazer a primeira applicação da doutrina precedente, procuremos a envolvente das normaes á curva cujas coordenadas são dadas pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, em funcção da variavel independente t.

A equação da normal é

$$(X - x) x' + (Y - y) y' = 0,$$

x' e y' representando as derivadas de x e y relativamente a t.

Temos pois de procurar a envolvente das rectas representadas por esta equação, considerando t como parametro arbitrario.

Derivando para isso a equação precedente relativamente a t, vem

$$(X - x) x'' + (Y - y) y'' = x'^2 + y'^2.$$

Temos pois

$$X - x = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{y''x' - x''y'}, \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{y''x' - x''y'}.$$

Estas equações determinam as coordenadas X e Y dos pontos da envolvente pedida em funcção de variavel independente t, e mostram que esta envolvente coincide (n.º 90–II) com a evoluta da curva dada; o que concorda com o que se disse no fim do n.º 90–I.

II. Como segunda applicação, procuremos a envolvente das ellipses representadas pelas equações

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1,$$

onde a e b representam constantes dadas.

Temos de derivar estas equações relativamente a α, considerando β como funcção de α, determinada pela segunda, o que dá

$$-\frac{x^2}{\alpha^3} - \frac{y^2}{\beta^3}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

e de eliminar α, β e $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre estas equações e as equações dadas.

Para fazer esta eliminação, basta notar que as ultimas equações dão

$$\frac{by^2}{\beta^3} = \frac{ax^2}{\alpha^3}$$

e portanto, pondo $ax^2 = \lambda\alpha^3$,

$$y^2 = \frac{\beta^3\lambda}{b}, \quad x^2 = \frac{\alpha^3\lambda}{a}.$$

Substituindo estes valores de x^2 e y^2 na equação da ellipse e attendendo á segunda equação dada, vê-se que temos $\lambda = 1$, e portanto

$$\alpha = (ax^2)^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = (by^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Basta apenas substituir estes valores na equação que liga α com β, para obter a equação

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

que representa a evoluta de uma ellipse (n.º 91–II).

III. Procuremos finalmente a envolvente C_1 das polares dos pontos de uma curva dada C, cujas equações são $x_1 = \varphi(t)$ e $y_1 = \psi(t)$, relativamente a uma conica tambem dada, cuja equação podemos suppôr reduzida á fórma

$$y = kx^2 + ly^2.$$

Por ser (n.º 86-VI)

$$2kxx_1 + (2ly - 1)y_1 - y = 0$$

a equação da polar do ponto (x_1, y_1), obtem-se a equação da curva pedida eliminando o parametro t entre esta equação e a sua derivada relativamente a t

$$2kxx_1' + (2ly - 1)y_1' = 0.$$

Eliminando $2ly - 1$ entre estas duas equações, obtem-se a seguinte:

$$2k(x_1 y_1' - y_1 x_1')x - y_1' y = 0,$$

que, conjunctamente com a anterior, determinam as coordenadas (x, y) da curva procurada C_1 em funcção da variavel independente t. A esta curva C_1 chama-se *polar* de C relativamente á conica dada.

Vamos agora mostrar que, reciprocamente, a curva C é a polar de C_1 relativamente á mesma conica.

Para isso notemos que é condição necessaria e sufficiente para que a tangente á curva C, isto é, a recta representada pela equação

$$(Y - y_1)x_1' = (X - x_1)y_1',$$

seja a polar de um ponte (x_2, y_2) relativamente á conica, que esta equação coincida com a d'esta polar, isto é, com a equação

$$(2ly_2 - 1)Y + 2kx_2 X - y_2 = 0.$$

Escrevendo a primeira equação do modo seguinte:

$$x_1' Y - y_1' X + x_1 y_1' - y_1 x_1' = 0,$$

vê-se que as condições para esta coincidencia são

$$2k(x_1 y_1' - y_1 x_1')x_2 - y_1' y_2 = 0, \quad 2kx_2 x_1' + (2ly_2 - 1)y_1' = 0.$$

Comparando estas equações com as que determinam a envolvente C_1, precedentemente achadas, vê-se que coincidem quando $x = x_2$ e $y = y_2$. Logo a curva formada pelos pontos cujas polares, relativas á cónica, coincidem com as tangentes a C, é C_1; e portanto C é a envolvente das polares dos pontos de C_1. Por este motivo as curvas C e C_1 dizem se *polares reciprocas* uma da outra relativamente á conica.

98. Consideremos a recta representada pela equação

$$ux + vy + w = 0,$$

onde u, v e w representam parametros, um dos quaes póde ser considerado como egual á unidade, e supponhamos que entre estes parametros existe a relação homogenea

$$F(u, v, w) = 0.$$

A envolvente das posições que toma esta recta, quando o parametro independente varía, é uma curva tangente á recta em todas as suas posições e da qual, porisso, esta ultima egualdade se diz a *equação tangencial*. Como toda a curva é a envolvente das suas tangentes, toda a curva tem uma equação tangencial.

Seja $f(x, y, z) = 0$ a equação homogenea de uma curva dada, referida a coordenadas cartesianas. Para obter a sua equação tangencial, basta exprimir as condições para que a recta precedentemente considerada coincida com a tangente a esta curva, o que dá (n.º 86–VI)

$$f'_x(x, y, z) : u = f'_y(x, y, z) : v = f'_z(x, y, z) : w,$$

e eleminar x e y entre estas equações.

A equação tangencial de uma curva é algebrica, quando a equação cartesiana o é, e reciprocamente. N'este caso, o grau da equação tangencial é egual ao numero de tangentes á curva que se podem tirar por um ponto qualquer do seu plano, não situado sobre ella.

Para o ver, basta notar que, sendo (x_1, y_1) as coordenadas d'este ponto, a condição para que a recta representada pela equação

$$ux + vy + w = 0$$

passe por elle, é

$$ux_1 + vy_1 + w = 0;$$

que os systemas de valores de u e v que satisfazem a esta ultima equação e á equação tangencial da curva dada determinam as tangentes consideradas; e que o numero d'estes systemas é egual ao grau d'esta equação.

Foi Plücker quem primeiro mostrou a conveniencia de considerar simultaneamente, no estudo das curvas algebricas, as equações cartesianas e tangenciaes, como se póde ver nas suas importantes obras: *System der analytischen Geometrie*, publicada em 1835, e *Theorie der algebraichen curven*, publicada em 1839.

99. Se uma curva for dada pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, para obter a sua equação tangencial, basta exprimir as condições para que as rectas

$$uX + vY + w = 0, \quad (Y - y)x' = (X - x)y'$$

coincidam; o que dá

$$\text{(A)} \qquad \frac{x'}{v} = -\frac{y'}{u} = \frac{xy' - yx'}{w},$$

e eliminar t entre estas equações.

I. A equação da polar reciproca da curva considerada relativamente ao circulo imaginario

$$x_1^2 + y_1^2 + k^2 = 0$$

obtem-se eliminando t entre a equação da polar do ponto (x, y) relativamente a este circulo,

$$xx_1 + yy_1 + k^2 = 0,$$

e a sua derivada relativamente a t,

$$x_1 x' + y_1 y' = 0.$$

Estas equações podem ser substituidas pelas seguintes:

$$\frac{x'}{y_1} = -\frac{y'}{x_1} = \frac{xy' - yx'}{k^2},$$

que coincidem com as equações (A), quando se põe

$$\frac{x_1}{k^2} = \frac{u}{w}, \quad \frac{y_1}{k^2} = \frac{v}{w}.$$

Logo *a equação que resulta de mudar na equação tangencial da curva dada* $\frac{u}{w}$ *em* $\frac{x_1}{k^2}$ *e* $\frac{v}{w}$ *em* $\frac{y_1}{k^2}$ *coincide com a equação cartesiana da polar d'esta curva relativamente ao circulo considerado.*

100. No caso de ser dada uma familia de curvas não existentes no mesmo plano

$$(1') \qquad f(x, y, z, a) = 0, \quad F(x, y, z, a) = 0,$$

a analogia com o que se disse no n.º 96 leva a chamar-se envolvente d'estas curvas a curva cujas equações se obtêem eliminando a entre as seguintes:

$$(2') \qquad f(x, y, z, a) = 0, \quad F(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0,$$

se só tres d'estas equações forem distinctas.

THEOREMA. *A tangente á envolvente n'um ponto é tambem tangente n'este ponto á envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x as duas primeiras equações (2'), considerando a como funcção de x, y e z dada pela terceira, vêem as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial F}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

que determinam os coefficientes $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$ que entram nas equações da tangente á envolvente (n.º 92) no ponto (x, y). Mas por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, estas equações reduzem-se ás seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

que são as que determinam os coefficientes das equações da tangente á envolvida que passa pelo ponto considerado. Logo as duas tangentes coincidem.

Esta conclusão não tem logar quando são simultaneamente nullas as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ ou as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial z}$.

101. *Superficies envolventes.* — Chama-se *superficie envolvente* das superficies representadas pela equação

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0$$

o logar geometrico das linhas para que tendem as intersecções de cada uma das superficies representadas por esta equação com uma outra, quando o valor do parametro correspondente a esta tende para o que corresponde áquella. As superficies representadas pela equação (1) chamam-se *envolvidas* e as linhas para que tendem as intersecções das envolvidas chamam-se *caracteristicas.*

Vê-se como no n.º 96 que as equações

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad f(x, y, z, a + h) = 0,$$

que determinam a intersecção de duas superficies da familia considerada, podem ser substituidas pelas seguintes

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} + \varepsilon = 0,$$

ε representando uma quantidade infinitamente pequena com h. Fazendo tender h para zero, temos as equações

$$(2) \qquad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0,$$

que determinam a linha para que tende esta intersecção, quando h tende para zero, e que porisso representam uma caracteristica da superficie. Eliminando a entre estas equações, vem a equação da envolvente considerada.

A theoria das superficies envolventes foi dada por Monge na sua obra admiravel: *Application de l'Analyse à la Géométrie,* onde fez tambem d'ella bellas e importantes applicações.

I. Theorema. *O plano tangente á superficie envolvente n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á superficie envolvida correspondente.*

Com effeito, derivando relativamente a x e y a primeira das equações (2), considerando a como funcção de x e y, dada pela segunda, e representando por p e q as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot p + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot p\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot q + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} \cdot q\right) = 0,$$

que determinam os coefficientes p e q da equação (n.º 94) do plano tangente á envolvente que passa pelo ponto (x, y). Mas, por ser $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, estas equações reduzem-se ás seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} . p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} . q = 0,$$

que são as que determinam os coefficientes da equação do plano tangente á superficie envolvida que passa pelo ponto considerado, quando as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ não são simultaneamente nullas n'este ponto. Logo os dois planos tangentes coincidem.

II. Como as equações das caracteristicas são

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0,$$

estas linhas admittem uma envolvente (n.º 100), cujas equações se obtêem eliminando a entre as seguintes:

$$(3) \qquad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, z, a)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z, a)}{\partial a^2} = 0.$$

A esta envolvente dá-se o nome de *aresta de reversão* da superficie.

Do theorema demonstrado no n.º 100 conclue-se que *a tangente á aresta de reversão n'um ponto qualquer é tambem tangente n'este ponto á caracteristica correspondente.*

102. *Applicações.* — I. Consideremos, como primeira applicação, as superficies de revolução, as quaes podem ser definidas como envolventes de uma esphera cujo centro se move sobre uma recta dada e cujo raio varía de grandeza segundo uma lei dada. As caracteristicas são n'este caso os parallelos da superficie.

Sejam

$$x = \alpha z + k, \quad y = \beta z + l$$

as equações da recta dada e (a, b, c) as coordenadas do centro da esphera. Estas coordenadas devem satisfazer ás equações

$$a = \alpha c + k, \quad b = \beta c + l,$$

e portanto á equação da esphera póde dar-se a fórma

$$(x - \alpha c - k)^2 + (y - \beta c - l)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Supponhamos agora que $c = \varphi(R)$ é a equação que traduz a lei segundo a qual o raio da esphera varía, quando o seu centro se desloca. Para achar a envolvente pedida, temos de derivar a equação d'esta superficie relativamente a R, o que dá

$$[(x - \alpha c - k)\alpha + (y - \beta c - l)\beta + z - c]\varphi'(R) = -R,$$

ou

$$(\alpha x + \beta y + z)\,\varphi'(\mathrm{R}) = [(\alpha c + k)\,\alpha + (\beta c + l)\,\beta + c]\,\varphi'(\mathrm{R}) - \mathrm{R}.$$

Eliminando R entre esta equação e a da esphera, que se póde escrever do modo seguinte:

$$(x - k)^2 + (y - l)^2 + z^2 - 2c\,(\alpha x + \beta y + z) + c^2\,(\alpha^2 + \beta^2 + 1) - 2c\,(k\alpha + l\beta) = \mathrm{R}^2,$$

obtem se uma equação da fórma

$$\alpha x + \beta y + z = \psi[(x - k)^2 + (y - l)^2 + z^2].$$

Logo toda a superficie de revolução deve satisfazer a uma equação d'esta fórma.

A equação differencial correspondente á que precede foi dada no n.º 75-2.º, e no n.º 94-V foi dada a sua interpretação geometrica.

No caso de o eixo de revolução coincidir com o eixo dos z, temos $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 0$, $l = 0$, e portanto a equação das superficies de revolução toma a fórma

$$z = \psi(x^2 + y^2).$$

A consideração de familias de superficies, caracterisadas pelo seu modo de geração, pelas suas equações finitas e pelas suas equações ás derivadas parciaes, é devida a Monge. Encontra-se na obra precedentemente mencionada, onde são estudadas muitas familias importantes, entre as quaes estão comprehendidas as de revolução, as cylindricas, as conicas, etc.

II. Chamam-se *superficies planificaveis* as superficies envolventes dos planos dados por uma equação em que figura um só parametro arbitrario. As caracteristicas são n'este caso linhas rectas.

Seja

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 \tag{1}$$

a equação do plano gerador, onde A, B, C, D representam funcções de um parametro a. Para achar a equação da superficie planificavel gerada por este plano, é necessario eliminar a entre esta equação e a sua derivada relativamente a a:

$$\frac{d\mathrm{A}}{da}x + \frac{d\mathrm{B}}{da}y + \frac{d\mathrm{C}}{da}z + \frac{d\mathrm{D}}{da} = 0. \tag{2}$$

1) As superficies planificaveis satisfazem a uma equação ás derivadas parciaes, que vamos achar.

Seja C differente de zero. Derivando a primeira das equações precedentes relativamente a x e y e attendendo á segunda, temos as equações

$$A + Cp = 0, \quad B + Cq = 0,$$

que, pela eliminação de a, dão uma equação da fórma

$$q = \varphi(p).$$

Derivando esta equação relativamente a x e a y, e representando por r, s e t as derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, obtêem-se as equações

$$s = \varphi'(p) r, \quad t = \varphi'(p) s,$$

d'onde se deduz

$$s^2 - rt = 0.$$

Esta equação, independente das funcções de a que entram na equação do plano, é a equação ás derivdas parciaes das superficies planificaveis.

2) As superficies planificaveis gozam da seguinte propriedade importante:

Nas superficies planificaveis o plano tangente n'um ponto é tambem tangente em todos os outros pontos da mesma caracteristica.

Resulta esta propriedade do theorema 1 do n.º 101.

3) As superficies cylindricas e conicas estão comprehendidas na familia das superficies planificaveis. As primeiras são as envolventes das posições que toma um plano que se move parallelamente a uma recta dada, e as suas caracteristicas são rectas parallelas áquella. As segundas são as envolventes das posições que toma um plano que passa por um ponto dado, e as suas caracteristicas são rectas que passam por este ponto.

Para fazer uma applicação da equação das superficies pianificaveis, vamos procurar a equação da familia das superficies conicas

Sendo (α, β, γ) o ponto fixo por onde deve passar o plano gerador, α, β e γ devem satisfazer ás equações (1) e (2), e portanto temos as equações de condição

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0,$$

$$\frac{dA}{da}\alpha + \frac{dB}{da}\beta + \frac{dC}{da}\gamma + \frac{dD}{da} = 0.$$

Eliminando D e $\frac{dD}{da}$ entre estas equações e as equações (1) e (2), temos

$$A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0,$$

$$\frac{dA}{da}(x-\alpha)+\frac{dB}{da}(y-\beta)+\frac{dC}{da}(z-\gamma)=0,$$

e portanto

$$A+B\frac{y-\beta}{x-\alpha}+C\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=0,$$

$$\frac{dA}{da}+\frac{dB}{da}\frac{y-\beta}{x-\alpha}+\frac{dC}{da}\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=0.$$

Eliminando a entre estas equações, vem uma equação da fórma

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\Psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right);$$

e vê-se porisso que todas as superficies conicas satisfazem a uma equação d'esta fórma (Monge: l. c.).

4) Procuremos a superficie planificavel envolvente dos planos osculadores de uma curva dada, cujas equações são, tomando t para variavel independente,

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\pi(t).$$

A equação do plano osculador é (n.º 92-IV)

$$(z'y''-y'z'')(X-x)+(x'z''-z'x'')(Y-y)+(y'x''-x'y'')(Z-z)=0,$$

e portanto a equação da superficie pedida resulta de eliminar o parametro arbitrario t entre esta equação e a sua derivada relativamente a t:

$$(z'y'''-y'z''')(X-x)+(x'z'''-z'x''')(Y-y)+(y'x'''-x'y''')(Z-z)=0.$$

Esta eliminação não póde ser effectuada sem se especificar primeiro as funcções φ, ψ e π.

Para achar as equações da aresta de reversão, temos de empregar, além das equações precedentes, a equação que resulta de derivar a segunda relativamente a t:

$$\begin{aligned}&(z''y'''-y''z'''+z'y^{(4)}-y'z^{(4)})(X-x)\\&+(x''z'''-z''x'''+x'z^{(4)}-z'x^{(4)})(Y-y)\\&+(y''x'''-x''y'''+y'x^{(4)}-x'y^{(4)})(Z-z)=0,\end{aligned}$$

e de eliminar depois t entre estas tres equações. Como a estas tres equações se satisfaz pondo

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z,$$

segue-se que *a curva proposta é aresta de reversão da superficie envolvente dos seus planos osculadores.*

5) Do theorema que precede conclue-se que as *tangentes a qualquer curva dada formam uma superfiçie planificavel.* Com effeito, vimos de vêr que existe uma superficie planificavel envolvente dos planos osculadores da curva dada, da qual ella é aresta de reversão. Logo as caracteristicas d'esta superficie coincidem com as tangentes á curva dada (n.º 101-II).

6) Uma curva não póde ser aresta de reversão de duas superficies planificaveis differentes, visto que as caracteristicas das duas superficies devem ser tangentes á curva considerada. Porisso, se uma superficie planificavel tem para aresta de reversão uma curva dada, coincide com a envolvente dos planos osculadores d'esta curva; e os planos tangentes áquella superficie são osculadores da sua aresta de reversão.

7) As superficies planificaveis estão comprehendidas no grupo mais geral das *superficies regradas,* as quaes são geradas por uma recta que se move segundo uma lei qualquer.

Sejam

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

as equações de uma recta e sejam A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 funcções de um parametro arbitrario a. Estas rectas só dão origem a uma superficie planificavel quando têem envolvente, isto é, quando só são distinctas tres equações do grupo formado pelas anteriores e pelas seguintes:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0,$$

onde A′, B′, etc. representam as derivadas de A, B, etc. relativamente a a. A condição para que a recta proposta gere uma superficie planificavel, quando a varía, é pois

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A' & B' & C' & D' \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

As superficies regradas que não são planificaveis, dizem-se *empenadas.*

CAPITULO IV

Derivadas e differenciaes de ordem qualquer

I

Formação das derivadas de ordem qualquer

103. Por meio das regras dadas no capitulo II podemos formar successivamente as derivadas y', y'', etc. da funcção $y=f(x)$. Ha porém questões em que é necessario conhecer a lei d'estas derivadas, isto é, a funcção de x e n que representa a derivada $y^{(n)}$; vamos porisso agora procurar esta funcção, considerando os mesmos casos que nos n.^{os} 61 e 62, por ordem diversa.

104. *Derivadas de algumas funcções simples.* — 1) Formando as derivadas successivas da funcção $y=x^k$, acha-se

$$y'=kx^{k-1},\ y''=k(k-1)x^{k-2},\ \ldots;$$

e, em geral,

$$y^{(n)}=k(k-1)\ldots(k-n+1)\,x^{k-n}.$$

2) A funcção $y=e^x$ dá

$$y^{(n)}=e^x.$$

3) A funcção $y=\log x$ dá $y'=x^{-1}$, e portanto, derivando $n-1$ vezes y',

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n},$$

representando por $(n-1)!$ o producto $1.2.3\ldots(n-1)$.

4) A funcção $y=\operatorname{sen} x$ dá

$$y'=\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad y''=\operatorname{sen}\left(x+2\,\frac{\pi}{2}\right),\ \ldots;$$

e, em geral,

$$y^{n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

5) A funcção $y = \cos x$ dá do mesmo modo

$$y^{n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

105. *Theoremas geraes.* — I. Seja

$$y = u_1 + u_2 + \dots + u_m,$$

onde u_1, u_2, etc. representam funcções de x. Temos

$$y^{n)} = u_1^{n)} + u_2^{n)} + \dots + u_m^{n)}.$$

NOTA. — A derivada de ordem n da somma

$$y = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k$$

é

$$y^{n)} = \sum_{k=n}^{m} A_k k(k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n}.$$

Fazendo $x = 0$ e representando por $y_0^{n)}$ o valor correspondente da derivada $y^{n)}$, vem o resultado

$$y_0^{n)} = A_n n!.$$

II. Procuremos a derivada de ordem n do producto $y = u_1 u_2$ de duas funcções dadas. Temos

$$y' = u_1' u_2 + u_1 u_2',$$

$$y'' = u_1'' u_2 + 2u_1' u_2' + u_1 u_2'',$$

$$y''' = u_1''' u_2 + 3u_1'' u_2' + 3u_1' u_2'' + u_1 u_2''',$$

. . . .

Observa-se n'estas egualdades que os coefficientes numericos coincidem com os que apparecem nos desenvolvimentos das potencias 1.ª, 2.ª, 3.ª, etc. do binomio $u_1 + u_2$, e que os indices superiores coincidem com os expoentes de u_1 e u_2 nos mesmos desenvolvimentos.

Somos pois levados, por inducção, a escrever a fórmula

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i-1)} + \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)} + \ldots + u_1 u_2^{(n)}$$

ou

$$(1) \qquad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)},$$

representando por $\binom{n}{i}$ o numero de combinações de n lettras tomadas a i a i.

Para demonstrar esta fórmula, basta provar que, se é verdadeira para o indice n, tambem é verdadeira para o indice $n+1$. Para isso derivemos os dois membros d'esta egualdade, o que dá

$$y^{(n+1)} = u_1^{(n+1)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+2)} u_2^{(i-1)} + \binom{n}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)} + \ldots + u_1 u_2^{(n+1)}$$

ou

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)},$$

por ser

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

A fórmula (1), devida a Leibnitz[1], póde ser escripta *symbolicamente* do modo seguinte:

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2)^{(n)},$$

significando esta egualdade que se deve desenvolver $(u_1+u_2)^n$ pela fórmula do binomio e substituir no resultado os expoentes por indices de derivação.

Do mesmo modo, no caso da funcção

$$y = u_1 u_2 \ldots u_m$$

temos *symbolicamente*

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)^{(n)} = \sum \frac{n!\, u_1^{(i_1)} u_2^{(i_2)} \ldots u_m^{(i_m)}}{i_1!\, i_2! \ldots i_m!}.$$

---

(1) Vej. *Opera omnia,* Genevae, 1748, tom. III, pag. 421.

em que Σ se refere a todas as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n,$$

e onde se deve considerar $0!$ como representando a unidade.

Deduz-se esta fórmula da anterior por um processo analogo ao que se emprega em Algebra para passar da lei do desenvolvimento do binomio para a lei do desenvolvimento dos polynomios.

III. Consideremos agora a funcção $y = \frac{u_1}{u_2}$. Temos

$$u_1 = y u_2,$$

$$u_1' = y' u_2 + y u_2',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_1^{(n)} = y^{(n)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i} y^{(n-i)} u_2^{(i)} + \ldots + y u_2^{(n)}.$$

Por meio d'estas egualdades obtêem-se successivamente as derivadas y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ da fracção proposta; ou directamente a derivada $y^{(n)}$, expressa por um determinante.

IV. Seja y uma funcção de x determinada pelas equações

$$\text{(A)} \qquad y = f(u), \quad u = \varphi(x)$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Temos

$$y' = \frac{dy}{du} u',$$

$$y'' = \frac{d^2y}{du^2} u'^2 + \frac{dy}{du} u'',$$

$$y''' = \frac{d^3y}{du^3} u'^3 + 3 \frac{d^2y}{du^2} u' u'' + \frac{dy}{du} u''',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Vê-se facilmente que a expressão da derivada $y^{(n)}$ é da fórma:

$$y^{(n)} = \Sigma \mathrm{A} \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda,$$

A, α, β, γ, ..., λ, i sendo numeros inteiros, que vamos determinar. Para isso, appliquemos a fórmula precedente á funcção

$$y = u^n, \quad u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n representam constantes arbitrarias; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1)\ldots(n-i+1) u^{n-i} (u')^{\alpha} (u'')^{\beta} \ldots (u^{(n)})^{\lambda},$$

e, pondo $x = 0$ e notando que é (n.º 105-I) $u_0^{(k)} = k!\, a_k$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma A n(n-1)\ldots(n-i+1)(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda} a_0^{n-i} a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \ldots a_n^{\lambda}.$$

Por outra parte, temos

$$y = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^n$$
$$= \Sigma \frac{n!\, a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n} x^{h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots + nh_n}}{h_0!\, h_1!\, h_2! \ldots h_n!},$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de h_0, h_1, etc. que satisfazem á equação

$$h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n = n,$$

devendo substituir-se $h_0!$, $h_1!$, $h_2!$, etc. pela unidade, quando é $h_0 = 0$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, etc.

Derivando esta egualdade e pondo $x = 0$, vem (n.º 105-I)

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{(n!)^2 a_0^{h_0} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n}}{h_0!\, h_1!\, h_2! \ldots h_n!},$$

onde Σ se refere agora a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de h_0, h_1, h_2, etc. que satisfazem ás equações

$$h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n = n, \quad h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots + nh_n = n.$$

Os dois valores de $y_0^{(n)}$, que vimos de achar, devem ser identicos, quaesquer que sejam os valores de a_0, a_1, a_2, etc.; portanto vem

$$\alpha = h_1, \; \beta = h_2, \; \ldots, \; \lambda = h_n, \; h_0 = n - i = n - (\alpha + \beta + \ldots + \lambda),$$

$$A = \frac{n!}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!\, (2!)^{\beta} (3!)^{\gamma} \ldots (n!)^{\lambda}}.$$

Temos pois a fórmula

$$(3) \qquad y^{(n)}_x = \Sigma \frac{n!\,\frac{d^i y}{du^i}(u')^{\alpha}(u'')^{\beta}\ldots(u^{(n)})^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}},$$

onde Σ se refere a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de α, β, γ, ..., λ que satisfazem á equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Deve observar-se que na fórmula (3) devem substituir-se nos denominadores os factores que forem nullos pela unidade, como se faz na lei do desenvolvimento dos polynomios, d'onde a fórmula é tirada.

NOTA. — A respeito dos coefficientes numericos

$$A = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}}$$

faremos algumas observações.

1.º *Estes coefficientes são numeros inteiros.*

Esta propriedade resulta da demonstração precedente, e constitue um theorema interessante de Arithmetica, a que se póde tambem chegar por considerações relativas á theoria das combinações ([1]).

2.º Sendo $y = u^k$, $u = e^x - 1$, temos

$$\frac{dy}{du} = ku^{k-1},\ \frac{d^2y}{du^2} = k(k-1)u^{k-2},\ \ldots,\ \frac{d^ky}{du^k} = k!,$$

$$\frac{d^{k+1}y}{du^{k+1}} = 0,\ \ldots,\ u' = u'' = \ldots = e^x;$$

e, pondo $x = 0$,

$$\left(\frac{dy}{du}\right)_0 = 0,\ \ldots,\ \left(\frac{d^ky}{du^k}\right)_0 = k!,\ \ldots,$$

$$u'_0 = u''_0 = \ldots = 1.$$

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. CXIII, pag. 1066.

Substituindo em (3), vem a fórmula seguinte, de que adiante faremos uso:

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^n (e^x-1)^k}{dx^n}\right)_0 = \Sigma' A,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da fórmula (3) que correspondem ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = k.$$

3.º Sendo $y = e^u$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{d^i y}{du^i} = e^u, \quad u' = u'' \ldots = e^x,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_0 = 1, \quad u' = u'' = \ldots = 1.$$

Logo, applicando (3), virá a fórmula

$$\left(\frac{d^n e^{e^x-1}}{dx^n}\right)_0 = \Sigma A,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da fórmula (3).

4.º O quociente $\frac{\Sigma A}{n!}$ tende para o limite zero, quando n augmenta indefinidamente [1].

V. Seja

$$y = f(u_1, u_2, \ldots, u_l), \quad u_1 = \varphi_1(x), \quad u_2 = \varphi_2(x), \ldots, \quad u_l = \varphi_l(x),$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Para resolver esta questão, empregaremos o mesmo methodo que em um artigo que a este respeito publicámos no *Giornale di Matematiche* (Napoli, tom. XVIII), que passamos a expôr.

---

[1] Para a demonstração d'esta propriedade veja-se:

Oliveira Ramos e C. J. de Faria: *Sobre os coefficientes etc.* (*Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, tom. VII).

Temos

$$y' = \frac{\partial f}{\partial u_1} u_1' + \frac{\partial f}{\partial u_2} u_2' + \dots$$

$$y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} (u_1')^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} u_1' u_2' + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_1} u_1'' + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n tem a fórma:

$$(b) \quad \begin{cases} y^{(n)} = \Sigma \mathrm{A} \dfrac{\partial^m f}{\partial u_1^a \partial u_2^b \dots} (u_1')^\alpha (u_1'')^\beta \dots (u_1^{(n)})^\lambda \\ \qquad \times (u_2')^{\alpha'} (u_2'')^{\beta'} \dots (u_2^{(n)})^{\lambda'} \times \dots, \end{cases}$$

onde

$$m = a + b + c + \dots,$$

e onde A, a, b, ..., α, β, ..., α', β', ... são numeros inteiros, que vamos determinar. Para isso, appliquemos esta fórmula ás funcções

$$y = u_1^n u_2^n \dots u_l^n,$$

$$u_1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

$$u_2 = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

onde a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... representam constantes arbitrarias; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma \mathrm{A} n (n-1) \dots (n-a+1) \times n (n-1) \dots (n-b+1) \times \dots$$
$$\times u_1^{n-a} (u_1')^\alpha (u_1'')^\beta \dots \times u_2^{n-b} (u_2')^{\alpha'} (u_2'')^{\beta'} \dots,$$

e, pondo $x = 0$, e attendendo ao que se disse no n.º 105-I,

$$y^{(n)} = \Sigma \begin{Bmatrix} \mathrm{A} n (n-1) \dots (n-a+1) \times n (n-1) \dots (n-b+1) \times \dots \\ \times (2!)^{\beta+\beta'+\dots} (3!)^{\gamma+\gamma'+\dots} \dots (n!)^{\lambda+\lambda'+\dots} \\ \times a_0^{n-a} a_1^\alpha a_2^\beta \dots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \dots \times \dots \end{Bmatrix}.$$

Por outra parte, applicando a fórmula de Leibnitz ao producto considerado, vem

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{h_1! \, h_2! \dots h_n!} (u_1^n)^{(h_1)} (u_2^n)^{(h_2)} \dots,$$

onde Σ se refere a todos os valores inteiros, positivos ou nullos, de h_1, h_2, etc. que satisfazem á equação

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_l = n;$$

ou, substituindo as derivadas $(u_1^n)^{(h_1)}$, $(u_2^n)^{(h_2)}$, etc. pelos seus valores, que se obtêem pela fórmula (3), e pondo $x=0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, n(n-1)\ldots(n-a+1)\, n(n-1)\ldots(n-b+1)\ldots}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta'!\ldots\lambda'!\ldots}$$

$$\times a_0^{n-a} a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \ldots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \ldots \times \ldots,$$

onde Σ se refere aos valores inteiros, positivos ou nullos, de α, β, ... α', β',... que satisfazem ás equações

$$\alpha + 2\beta + \ldots + h_1\lambda = h_1,$$

$$\alpha' + 2\beta' + \ldots + h_2\lambda' = h_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + h_l\lambda^{(l-1)} = h_l,$$

e portanto á equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda' + \ldots$$

$$+ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,\ b = \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda', \text{ etc.}$$

Os dois valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de obter, devem ser identicos, qualquer que seja o valor das quantidades a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...; portanto os inteiros α, β, ..., α', β', ... devem ter os mesmos valores nas duas expressões de $y_0^{(n)}$, e deve ser

$$A = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda! \times \alpha'!\beta'!\ldots\lambda'! \times \ldots \times (2!)^{\beta+\beta'+\ldots} \ldots (n!)^{\lambda+\lambda'+\ldots}}$$

Estão pois determinadas as constantes que entram em (b), e temos a fórmula seguinte, que resolve a questão proposta:

$$(4) \qquad y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda! \times \alpha'!\beta'!\ldots\lambda'! \times \ldots} \cdot \dfrac{\partial^m f}{\partial u_1^a \partial u_2^b \ldots} \\ \times (u_1')^{\alpha} \left(\dfrac{u_1''}{2!}\right)^{\beta} \ldots \left(\dfrac{u_1^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda} \times (u_2')^{\alpha'} \ldots \left(\dfrac{u_2^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'} \times \ldots, \end{array} \right.$$

onde Σ se refere a todas as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda' + \ldots$$
$$+ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda, \quad b = \alpha' + \ldots + \lambda', \text{ etc.},$$

e

$$m = a + b + c + \ldots$$

VI. Consideremos agora a funcção implicita y, definida pela equação

$$f(x, y) = 0.$$

Temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

por meio das quaes se obtêem successivamente y', y'', etc.

A lei que seguem estas equações obtem-se applicando á funcção $f(x, y)$ a fórmula (4), pondo $u_2 = x$, $u_1 = y$ e considerando y como funcção de x, o que dá

$$\text{(5)} \qquad \Sigma \frac{n!}{\alpha'!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{m-\alpha'}} (y')^{\alpha} (y'')^{\beta} \ldots (y^{(n)})^{\lambda} = 0,$$

onde Σ se refere a todas as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha' + \alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$m = \alpha' + \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

A fórmula que precede dá a derivada de ordem n em funcção das anteriores. A fórmula que dá directamente $y^{(n)}$ é muito complicada, e porisso não a exporemos aqui [1].

---

[1] Duarte Leite: *Sobre as derivadas etc.* (*Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, tom. IV).

II

Applicações

106. *Derivada da funcção arc tang x.* — I. A funcção $y = \text{arc tang}\, x$ dá $y' = (1+x^2)^{-1}$, d'onde se deduz (n.º 105-IV)

$$y^{(n)} = \Sigma (-1)^i \cdot \frac{(n-1)!\, i!\, (2x)^\alpha (1+x^2)^{-1-i}}{\alpha!\, \beta!},$$

onde $\alpha + 2\beta = n-1$, $i = \alpha + \beta$; e portanto

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, \Sigma (-1)^\beta \binom{n-1-\beta}{\beta}$$
$$\times (2x)^{n-1-2\beta}(1+x^2)^{\beta-n},$$

onde Σ se refere a todos os valores positivos de β, desde 0 até ao maior inteiro contido em $\frac{n-1}{2}$.

Á expressão da derivada de ordem n da funcção considerada póde dar-se uma fórma differente da precedente. Pondo $x = \cot \varphi$, o que dá $\frac{d\varphi}{dx} = -\text{sen}^2 \varphi$, vem

$$y' = \frac{1}{1+\cot^2 \varphi} = \text{sen}^2 \varphi,\quad y'' = -\text{sen}\, 2\varphi\, \text{sen}^2 \varphi,\ \text{etc.}$$

Em geral

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, \text{sen}^n \varphi\, \text{sen}\, n\varphi.$$

Demonstra-se facilmente esta fórmula mostrando que, se for verdadeira para a derivada da ordem n, tambem é verdadeira para a derivada da ordem $n+1$.

II. A comparação das duas expressões de $y^{(n)}$, que vimos de achar, dá a fórmula importante, attribuida a Viète:

$$\text{sen}\, n\varphi = \text{sen}\, \varphi\, \Sigma (-1)^\beta \binom{n-1-\beta}{\beta} (2\cos\varphi)^{n-1-2\beta}.$$

III. Se quizermos o valor de $y_0^{(n)}$, poremos $x = 0$ na fórmula que dá $y^{(n)}$.

1.º Se n é *impar*, todos os termos da fórmula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n-1-2\beta=0$, e teremos portanto

$$y_0^{(n)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!.$$

2.º Se n é *par*, o expoente $n-1-2\beta$ não póde ser nullo, e teremos $y_0^{(n)}=0$.

107. *Numeros de Bernoulli.* — I. Consideremos a funcção

$$y=(1+e^x)^{-1},$$

e procuremos o valor que toma $y^{(n)}$ quando é $x=0$.

Pondo

$$\varphi(x)=y-\frac{1}{2}=\frac{1-e^x}{2(1+e^x)},$$

vem

$$\varphi(-x)=\frac{e^x-1}{2(e^x+1)},$$

e portanto

$$\varphi(x)=-\varphi(-x),$$

e

$$\varphi'(x)=\varphi'(-x),\quad \varphi''(x)=-\varphi''(-x),\ \text{etc.}$$

Estas egualdades mostram que as derivadas de ordem par de $\varphi(x)$ se devem annullar quando se faz $x=0$, porque, se assim não fosse, teriam dois valores differentes para $x=0$, o que não póde ter logar.

As derivadas de y são eguaes ás derivadas de $\varphi(x)$, e portanto temos $y_0^{(n)}=0$, quando n é par.

As derivadas de ordem impar acham-se por meio da fórmula (3) do n.º 105, que dá

$$y^{(n)}=\Sigma(-1)^i\frac{n!\,i!\,e^{ix}(1+e^x)^{-i-1}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta(3!)^\gamma\ldots(n!)^\lambda},$$

onde

$$\alpha+2\beta+\ldots+n\lambda=n,\quad i=\alpha+\beta+\ldots+\lambda;$$

portanto temos, pondo $x=0$,

$$y_0^{(n)}=\Sigma(-1)^i\frac{n!\,i!}{2^{i+1}\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta(3!)^\gamma\ldots(n!)^\lambda}.$$

Posto isto, chamam-se *numeros de Bernoulli* os numeros definidos pela egualdade

$$(a) \qquad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} y_n ;$$

os quaes porisso *são nullos quando n é par*, e, quando n é impar, podem ser calculados por meio da fórmula[1]:

$$(6) \qquad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}-1} \Sigma (-1)^i \frac{i!}{2^{i+1} \alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda},$$

onde Σ se refere ás soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

II. De ser

$$\frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda}$$

um numero inteiro (n.º 105) e de ser $n+1$ par resulta que *os numeros de Bernoulli não podem conter em denominador factores primos differentes de 2 e dos factores primos de $2^{n+1}-1$, e que 2 não póde ter expoente superior a n.*

III. Da fórmula (6) vamos tirar outra mais propria para o calculo dos numeros de Bernoulli.

Com effeito, aquella fórmula dá

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} \left[(-1)^i \frac{i!}{2^{i+1}} \Sigma' \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \lambda! (2!)^\beta \dots (n!)^\lambda} \right],$$

onde Σ' se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + n\lambda = n$$

que dão a i o mesmo valor; e portanto (n.º 105-IV)

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{2^{i+1}} \left(\frac{d^n (e^x - 1)^i}{dx^n} \right)_0 ,$$

(1) Veja-se o nosso artigo: *Sur les nombres de Bernoulli*, publicado no *American Journal of Mathematics* de Baltimore, tom. VII.

ou, substituindo a derivada que entra no segundo membro pelo valor que se obtem desenvolvendo o binomio $(e^x-1)^i$ e derivando n vezes o resultado,

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathrm{B}_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i \dfrac{1}{2^{i+1}} \Big[i^n - i(i-1)^n \\ \quad + \dbinom{i}{2}(i-2)^n - \dbinom{i}{3}(i-3)^n + \ldots \pm \dbinom{i}{i-1} 1^n \Big]. \end{cases}$$

Ou por meio d'esta fórmula, ou por meio da fórmula (6), obtem-se

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6},\ \mathrm{B}_3 = \frac{1}{30},\ \mathrm{B}_5 = \frac{1}{42},\ \mathrm{B}_7 = \frac{1}{30},\ \mathrm{B}_9 = \frac{5}{66},\ \ldots$$

Os numeros que vimos de calcular foram considerados pela primeira vez por Jacob Bernoulli na sua *Ars conjectandi*. Euler encontrou-os depois em muitas questões de Analyse. No tomo LXXXV do *Jornal de Crelle* foi dado por Adams uma taboa que contem todos estes numeros até B_{123}.

IV. Derivando n vezes a egualdade

$$y(e^x+1) = 1,$$

vem

$$y^{(n)}(e^x+1) + e^x \left[n y^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} + \ldots + \binom{n}{n-1} y' + y \right] = 0.$$

Pondo $x=0$, e attendendo á fórmula (a), resulta a equação

$$\begin{aligned} &(-1)^{\frac{n+1}{2}}\, 2\, \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \mathrm{B}_n + (-1)^{\frac{n}{2}}\, n\, \frac{2^n-1}{n} \mathrm{B}_{n-1} \\ &+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2} \frac{2^{n-1}-1}{n-1} \mathrm{B}_{n-2} \\ &+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{3} \frac{2^{n-2}-1}{n-2} \mathrm{B}_{n-3} + \ldots \\ &+ (-1)\binom{n}{n-1} \frac{2^2-1}{2} \mathrm{B}_1 + \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

que, pondo $n=2p-1$, dá

$$2\,\frac{2^{2p}-1}{p}\,B_{2p-1}-\binom{2p-1}{2}\frac{2^{2(p-1)}-1}{p-1}\,B_{2p-3}+\ldots\pm\binom{2p-1}{2p-2}\frac{2^2-1}{1}\,B_1\mp 1=0;$$

e, pondo $n=2p$, dá

$$2p\,\frac{2^{2p}-1}{p}\,B_{2p-1}-\binom{2p}{3}\frac{2^{2p-2}-1}{p-1}\,B_{2p-3}+\ldots\pm\binom{2p}{2p-1}\frac{2^2-1}{1}\,B_1\mp 1=0.$$

Temos assim duas relações *lineares recorrentes* entre os numeros de Bernoulli, por meio de qualquer das quaes se póde calcular successivamente B_1, B_3, B_5, etc.

Foi Moivre quem primeiro achou uma relação recorrente entre os numeros de Bernoulli. Depois foram encontradas muitas outras.

V. Os numeros de Bernoulli apparecem em muitas questões de Analyse. Assim, por exemplo, os valores das derivadas da funcção

$$y=f(x)=\frac{x}{e^x-1},$$

correspondentes a $x=0$, exprimem-se por meio d'estes numeros.

Com effeito, derivando n vezes a identidade

$$\frac{x}{e^x+1}=\frac{x}{e^x-1}-\frac{2x}{e^{2x}-1}=f(x)-f(2x),$$

vem (n.º 105-II) a seguinte:

$$x\,\frac{d^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^n}+n\,\frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^{n-1}}=f^n(x)-2^n f^n(2x),$$

que, pondo $x=0$ e attendendo á fórmula (a), dá a relação, achada por Euler,

$$y_0^n=(-1)^{\frac{n}{2}-1}B_{n-1}.$$

Vê-se por esta egualdade que as derivadas de ordem impar de y são nullas.

A fórmula que precede não dá os valores de y_0 e y_0'. Para os achar, parte-se da equação

$$(e^x-1)\,y=x,$$

que dá

$$(e^x-1)\,y'+e^x\,y=1,$$

$$(e^x-1)\,y''+2e^x\,y'+e^x\,y=0,$$

e, pondo $x=0$, $y_0=1$, $y_0'=-\frac{1}{2}$.

VI. Do mesmo modo, no caso da funcção

$$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1},$$

temos, para determinar o valor de $y_0^{(n)}$, a fórmula

$$y_0^{(n)}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,2\,\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\,B_n,$$

a qual mostra que este valor é *nullo* quando n é *par*.

VII. Consideremos finalmente uma questão d'Algebra em que entram os numeros de Bernoulli.

Seja

$$y=1+e^x+e^{2x}+\ldots+e^{(n-1)x}=\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}=\frac{e^{nx}-1}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1},$$

e portanto

$$xy=(e^{nx}-1)\,\frac{x}{e^x-1}.$$

Derivando $k+1$ vezes esta egualdade e pondo $z=\frac{x}{e^x-1}$, vem

$$xy^{(k+1)}+(k+1)\,y^{(k)}=n^{k+1}e^{nx}z+(k+1)\,n^k e^{nx}z'$$

$$+\binom{k+1}{2}n^{k-1}e^{nx}z''+\ldots+\binom{k+1}{k}ne^{nx}z^{(k)}+(e^{nx}-1)\,z^{(k+1)}$$

e, pondo $x=0$,

$$y_0^{(k)}=\frac{n^{k+1}}{k+1}-\frac{n^k}{2}+\frac{kn^{k-1}}{2!}B_1-k(k-1)(k-2)\,n^{k-3}\frac{B_3}{4!}+\ldots$$

Por outra parte, derivando k vezes a funcção y, vem

$$y^{(k)}=e^x+2^k e^{2x}+\ldots+(n-1)^k\,e^{(n-1)x},$$

e portanto

$$y_n^k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k.$$

Temos pois a fórmula de Jacob Bernoulli

$$1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + k\frac{n^{k-1}}{2!}B_1 - k(k-1)(k-2)n^{k-3}\frac{B_3}{4!} + \ldots,$$

que dá o desenvolvimento, ordenado segundo as potencias de n, da somma das potencias do grau k dos $n-1$ primeiros numeros e serve para calcular rapidamente esta somma, quando n é um numero grande.

Resulta d'esta egualdade, como corollario, a seguinte:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

de que se fez applicação no n.º 58.

108. *Fórmula de Jacobi.* — Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da funcção

$$y = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Applicando a fórmula (3) do n.º 105, vem a egualdade

$$y^{(n-1)} = \sum \frac{(n-1)!\left(n-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{1}{2}-i+1\right)(-2x)^\alpha(-2)^\beta(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}-i}}{\alpha!\,\beta!\,(2)^\beta},$$

onde $\alpha + 2\beta = n-1$, $i = \alpha + \beta$; ou

$$y^{(n-1)} = \sum \frac{(-1)^{n-1-\beta}(n-1)!(2n-1)\ldots(2\beta+3)x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n-1-2\beta)!\,\beta!\,2^\beta}$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}\sum(-1)^\beta\frac{n!\,x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2\beta+1)(n-1-2\beta)!\beta!2^\beta},$$

que, por ser

$$2^\beta \cdot 1.2.3\ldots\beta \times 1.3\ldots(2\beta+1) = (2\beta+1)!,$$

dá

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}\sum(-1)^{\beta}\frac{(n-2\beta)\ldots n\,x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(2\beta+1)!},$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros positivos de β, desde 0 até $\frac{n-1}{2}$.

Pondo $x = \cos\omega$, vem

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}\sum(-1)^{\beta}\frac{(n-2\beta)\ldots n\cos^{n-1-2\beta}\omega\,\mathrm{sen}^{2\beta+1}\omega}{(2\beta+1)!}$$

ou, em virtude de uma fórmula de Trigonometria, dada no n.º 52,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1}.\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}.\mathrm{sen}\,n\,\mathrm{arc}\cos x,$$

resultado devido a Jacobi[1].

109. *Fórmula de Waring.* — Seja

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}_0 x^m + \mathrm{A}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{A}_{m-1}x + \mathrm{A}_m = 0$$

uma equação dada e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m$ as m raizes d'esta equação.

Por ser

$$\mathrm{U} = \mathrm{A}_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m),$$

e portanto

$$\log\mathrm{U} = \log\mathrm{A}_0 + \Sigma\log(x-x_\alpha),$$

temos, derivando n vezes,

$$\Sigma\frac{1}{(x-x_\alpha)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{d^n\log\mathrm{U}}{dx^n}.$$

Substituindo no segundo membro d'esta egualdade U pelo seu valor, applicando a fórmula (3) e attendendo ás egualdades $\mathrm{U}^{(m+1)} = 0$, $\mathrm{U}^{(m+2)} = 0$, etc., vem

$$\Sigma\frac{1}{(x-x_\alpha)^n} = (-1)^n n\Sigma(-1)^i\frac{(i-1)!\,\mathrm{U}'^{\alpha}\mathrm{U}''^{\beta}\mathrm{U}'''^{\gamma}\ldots}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}\ldots(m!)^{\lambda}}$$

---

[1] *Jornal de Crelle*, tom. xv, 1836.

e portanto, pondo $x=0$,

$$\sum \frac{1}{x_\omega^n} = n\sum(-1)^i \frac{(i-1)!\,U_0'^{-i}\,U_0''^{\alpha}\,U_0'''^{\beta}\dots}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^{\beta}\dots(m!)^{\lambda}}$$

$$= n\sum(-1)^i \frac{(i-1)!\,A_m^{-i}\,A_{m-1}^{\alpha}\dots A_0^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!}.$$

Applicando agora esta fórmula á equação

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0,$$

cujas raizes são reciprocas das raizes da equação primeiramente considerada, temos a *fórmula de Waring* (¹)

$$\sum_{\omega=1}^{m} x_\omega^n = n\sum(-1)^i \frac{(i-1)!\,A_0^{-i}\,A_1^{\alpha}\,A_2^{\beta}\dots A_m^{\lambda}}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!},$$

onde α, β, ..., λ são as soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + m\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Esta fórmula dá a somma das potencias de grau n das raizes da equação proposta.

Os coefficientes numericos que entram na fórmula de Waring gozam das seguintes propriedades arithmeticas, que nos limitaremos a enunciar (²), quando n é egual ou inferior a m:

1.° A somma dos valores absolutos de todos os coefficientes é egual a $2^n - 1$.

2.° A somma dos valores absolutos dos coefficientes dos termos do grau i é egual a $\binom{n}{i}$.

3.° A somma dos valores absolutos dos coefficientes dos termos do grau $n-i$ é egual á somma dos valores absolutos dos coefficientes dos termos do grau i.

110. *Derivadas das funcções compostas de funcções lineares de x.* — Seja na fórmula (4)

$$u_1 = A_1 + B_1 x,\quad u_2 = A_2 + B_2 x,\quad \dots,\quad u_l = A_l + B_l x;$$

(¹) Waring: *Meditationes algebricae*, 1772.

(²) Estas propriedades foram dadas pelo sr. J. B. d'Almeida Arez em um trabalho publicado no tom. I dos *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, onde se pode ver a sua demonstração.

teremos

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\alpha'!\ldots\alpha^{(l-1)}!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial u_1^{\alpha}\,\partial u_2^{\alpha'}\ldots} B_1^{\alpha} B_2^{\alpha'}\ldots,$$

onde Σ se refere ás soluções inteiras, positivas ou nullas, da equação

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \alpha^{(l-1)} = n.$$

A fórmula que precede póde ser escripta *symbolicamente* da maneira seguinte:

$$y^{(n)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} B_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} B_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_l} B_l \right)^n,$$

devendo depois do desenvolvimento substituir-se $(\partial f)^n$ por $\partial^n f$.

111. *Differenciaes de ordem superior.* — A differencial dy de $y = f(x)$, que está ligada com a derivada de y pela equação

$$dy = y'\,dx,$$

é uma funcção de x, cuja differencial $d(dy)$ (que se representa por d^2y) se obtem differenciando o producto $y'dx$; o que dá

$$d^2y = y''\,dx^2,$$

suppondo dx constante, qualquer que seja x, o que é sempre possivel, visto que x representa a variavel independente e portanto o seu augmento dx é arbitrario.

Do mesmo modo se acha

$$d^3y = y'''\,dx^3, \quad d^4y = y^{(4)}\,dx^4, \text{ etc.}$$

As differenciaes dy, d^2y, d^3y, etc. têem respectivamente os nomes de *differenciaes* de *primeira ordem*, de *segunda ordem*, etc. de y.

Seja h um augmento dado a x e Δy o augmento correspondente de y, isto é,

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = f_1(x).$$

Teremos (n.º 64)

$$\Delta y = hf'(x + \theta h),$$

onde θ representa uma quantidade comprehendida entre 0 e 1.

Representando por $\Delta^2 y$ o augmento $\Delta(\Delta y)$ da funcção Δy, correspondente ao augmento h de x, vem do mesmo modo

$$\Delta^2 y = f_1(x+h) - f_1(x) = h f_1'(x+\theta_1 h)$$

$$= h\,[f'(x+\theta_1 h + h) - f'(x+\theta_1 h)]$$

$$= h^2 f''(x+\theta_1 h + \theta_2 h).$$

Continuando do mesmo modo, obtem-se a fórmula geral

$$\Delta^n y = h^n f^{(n)}(x + \theta_1 h + \theta_2 h + \ldots + \theta_n h)$$

ou, pondo $\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = \theta$,

$$\Delta^n y = h^n f^{(n)}(x + \theta h),$$

θ representando uma quantidade comprehendida entre 0 e n.

A Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc. dá-se respectivamente o nome de *differença primeira, differença segunda,* etc. da funcção $f(x)$.

Se a derivada $f^{(n)}(x)$ é continua, temos

$$\Delta^n y = h^n [f^{(n)}(x) + \varepsilon] = d^n y + \varepsilon h^n,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena com h; logo a differencial de ordem n é a parte proporcional a h^n da differença de ordem n da funcção y.

112. Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes $z = f(x, y)$, cuja *differencial total* é definida pela egualdade (n.º 71)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Esta expressão de dz é uma funcção de x e y que, sendo differenciada, dá a expressão seguinte da *differencial total de segunda ordem*:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

ou, *symbolicamente*,

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2.$$

Continuando do mesmo modo, acha-se, por inducção, a fórmula *symbolica*

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^n,$$

que se demonstra por meio de um calculo analogo ao que foi empregado no n.º 105-II, e onde se deve substituir, depois de effectuar o desenvolvimento da potencia indicada, $(\partial z)^n$ por $\partial^n z$.

Do mesmo modo, no caso da funcção de muitas variaveis

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_l),$$

se acha a fórmula *symbolica*

$$d^n z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_l} dx_l\right)^n.$$

III

Relações entre as funcções e suas derivadas

113. *Se a funcção $f(x)$ admittir as derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, e se estas derivadas forem finitas em todos os pontos do intervallo de x_0 a x, temos*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n,$$

onde

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

θ representando uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade.

Para demonstrar este theorema, basta applicar ás funcções

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - (x - z) f'(z) - \frac{(x - z)^2}{2!} f''(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z),$$

$$\psi(z) = (x - z)^m$$

a fórmula conhecida (n.º 64–4.º)

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'[x_0+\theta(x-x_0)]}{\psi'[x_0+\theta(x-x_0)]},$$

notando para isso, que $\varphi'(z)$ é dada pela egualdade

$$\varphi'(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(z).$$

A fórmula que vimos de demonstrar é conhecida pelo nome de *fórmula de Taylor*, e a respeito d'ella faremos as seguintes observações:

1.ª Pondo $x=x_0+h$, a fórmula mencionada póde ser escripta debaixo da fórma seguinte

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + R_n,$$

onde

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m} f^{(n)}(x_0+\theta h).$$

2.ª A R_n chama-se *resto da serie de Taylor*. Da expressão d'este resto que vimos de achar, e que é devida a Schlömilch [1], deduz-se, pondo $m=n$, a fórmula

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)] = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

devida a *Lagrange*; e, pondo $m=1$, a fórmula

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)] = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

devida a *Cauchy*.

3.ª Se R_n tender para zero, quando n tende para o infinito, a funcção $f(x)$ póde ser desenvolvida em serie convergente, ordenada segundo as potencias de $x-x_0$, por meio da fórmula

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

---

(1) *Journal de Liouville*, 2.ª serie, tom. III.

4.ª Se na fórmula de Taylor pozermos $x_0 = 0$, vem a fórmula

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!m}f^{(n-1)}(0) + R_n,$$

onde

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m} f^{(n)}(\theta x),$$

conhecida pelo nome de *fórmula de Maclaurin.*

5.ª *Se tiver logar o desenvolvimento em serie*

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_a(x - x_0)^a + \ldots$$

e as funcções $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots$, $f^{(a)}(x)$ *forem continuas no ponto* x_0, *será*

$$A_a = \frac{f^{(a)}(x_0)}{a!}.$$

Para demonstrar este theorema, notemos primeiro que, ponde $x = x_0$, vem $A_0 = f(x_0)$.

Notemos em segundo logar que, pondo $x - x_0 = h$, temos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A_1 h + A_2 h^2 + \ldots,$$

d'onde se deduz

$$f'(x_0 + \theta h) = A_1 + A_2 h + \ldots,$$

e portanto

$$A_1 = f'(x_0).$$

Para completar a demonstração do theorema, basta notar que, se for verdadeiro para o coefficiente A_a, ainda é verdadeiro para o coefficiente A_{a+1}. Com effeito, temos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \ldots + \frac{h^a}{a!}f^{(a)}(x)$$
$$+ A_{a+1}h^{a+1} + A_{a+2}h^{a+2} + \ldots,$$

e portanto

$$\frac{1}{(a+1)!}f^{(a+1)}(x_0 + \theta h) = A_{a+1} + A_{a+2}h + \ldots,$$

d'onde se tira, fazendo tender h para zero,

$$A_{a+1} = \frac{f^{(a+1)}(x_0)}{(a+1)!}.$$

6.º Quem primeiro applicou o Calculo differencial ao desenvolvimento das funcções em serie foi João Bernoulli, que deu em 1694, nas *Acta eruditorum,* uma fórmula muito geral para esse fim, em cujos termos figuram as derivadas da funcção dada. Alguns annos mais tarde, em 1715, Taylor appresentou no seu *Methodus incrementorum* a serie que vimos de obter, a qual só differe pela fórma da que anteriormente tinha dado Bernoulli. Lagrange, que se occupou muito desta importante serie, deu na sua célebre *Théorie des fonctions analytiques* a expressão do resto precedentemente demonstrada, e abriu assim o caminho ao estudo das condições para que aquella serie possa ser applicada a uma funcção dada, o qual foi feito em seguida por Cauchy, empregando esta expressão e ainda outra, anteriormente mencionada, que publicou pela primeira vez no tomo I dos seus *Exercices de mathematiques.*

As duas expressões do resto que vimos de mencionar, só em poucos casos permittem reconhecer se a serie converge para a funcção dada, por ser em geral complicada a expressão da derivada de ordem n que n'ellas entra. Porisso Cauchy procurou tirar as condições d'esta convergencia directamente da natureza da funcção considerada por um methodo que será exposto em outro logar d'esta obra.

Para o estudo dos principaes modos de demonstrar e considerar a fórmula de Taylor que têem sido empregados até hoje, veja-se o nosso trabalho *Sobre o desenvolvimento das funcções em serie,* publicado nas *Memorias da Academia Real das Sciencias de Madrid* (tom. XVIII, 1897) [1].

114. O theorema demonstrado no numero precedente é um corollario do seguinte, que nos limitamos a enunciar [2]:

Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ admittirem as derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^{(m)}(x)$, e estas derivadas forem finitas em todos os pontos do intervallo de x_0 a x, teremos a relação

$$\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)-\dots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)}{F(x)-F(x_0)-(x-x_0)F'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(x_0)-\dots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}F^{(k)}(x_0)}$$

$$=\frac{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)+\dots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+R}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{(k+1)}(x_0)+\dots+\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}F^{(m-1)}(x_0)+R'},$$

---

(1) Transcripta no tom. I, pag. 1, das nossas *Obras sobre Mathematica.*

(2) Este theorema é extrahido do nosso artigo *Sur une formule d'Analyse*, publicado nas *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Paris, 3.ª serie, tom. V), onde se póde ver a respectiva demonstração. Encontra-se este artigo no tom. II das nossas *Obras sobre Mathematica.*

onde

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)],$$

$$R' = \frac{(x-x_0)^m (1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!} F^{(m)}[x_0+\theta(x-x_0)],$$

se o denominador do segundo membro se conservar differente de zero, quando θ varia desde 0 até 1.

Para deduzir d'este theorema o de Taylor, basta pôr

$$F(x) = (x-x_0)^m, \quad k = m-1, \quad l = n-1.$$

115. Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes

$$z = f(x, y),$$

para estender a estas funcções a fórmula de Taylor.

Pondo

$$x_0 + t(x-x_0) = u, \quad y_0 + t(y-y_0) = v, \quad \varphi(t) = f(u, v) = f[x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0)]$$

e applicando a fórmula de Maclaurin a esta funcção de t, vem

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{t^n (1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} \varphi^{(n)}(\theta t).$$

Os coefficientes de t que entram n'esta fórmula, são dados pelas egualdades

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y-y_0),$$

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(y-y_0)^2,$$

. . . .

que, pondo $t = 0$, dão

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y-y_0),$$

$$\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x_0 \partial y_0}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y_0^2}(y-y_0)^2.$$

. . . .

Para achar $\varphi^{(n)}(t)$, póde empregar-se o methodo usado no n.º 105-II para resolver uma questão analoga, ou a fórmula symbolica demonstrada no n.º 110, que dá

$$\varphi^{(n)}(t) = \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(y - y_0) \right|^{(n)},$$

e portanto

$$\varphi^{(i)}(0) = \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0) \right|^{(i)},$$

$$\varphi^{(n)}(\theta t) = \left| \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y - y_0) \right|^{(n)},$$

onde é

$$u_1 = x_0 + \theta(x - x_0)t, \quad v_1 = y_0 + \theta(y - y_0)t.$$

Pondo agora nas fórmulas precedentes $t = 1$, vem a seguinte:

$$z = f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0) \right|^{(i)}$$

$$+ \frac{(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} \left| \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, v_1)}{\partial v_1}(y - y_0) \right|^{(n)},$$

que tem os mesmos usos que a fórmula de Taylor. O methodo que vem de ser empregado para a deduzir é devido a Cauchy.

Deve observar-se que, por ser baseada a doutrina precedente nos theoremas dos n.os 69 e 113, deve impôr-se á funcção $f(u, v)$ a condição de admittir derivadas parciaes relativas a u e v, até á ordem n, continuas nos intervallos de $u = x_0$ a $u = x$ e de $v = y_0$ a $v = y$.

CAPITULO V

Applicações analyticas da fórmula de Taylor

I

Desenvolvimento em serie do binomio e de algumas funcções algebricas

116. Consideremos em primeiro logar o binomio

$$y = (1 + x)^k,$$

onde k representa uma quantidade real qualquer.

Temos

$$y' = k(1+x)^{k-1},$$

$$y'' = k(k-1)(1+x)^{k-2};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)(1+x)^{k-n};$$

e portanto

$$y_0 = 1,\ y'_0 = k,\ \dots,\ y_0^{(n-1)} = k(k-1)\dots(k-n+2).$$

Logo, applicando a fórmula de Maclaurin com a expressão do resto de Cauchy, virá

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \text{R}_n,$$

$$\text{R}_n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{k-n}$$

$$= \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{k-1}.$$

1) Supponhamos primeiro que o valor absoluto de x é inferior á unidade.

Por ser a razão dos dois termos consecutivos de ordem $n-1$ e $n-2$ da serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} x^n$$

egual a $\left(\frac{k}{n-1}-1\right)x$, esta razão tende para o limite $-x$, cujo valor absoluto é inferior á unidade, quando n tende para o infinito; e, portanto, esta serie é (n.º 22-III) convergente. Logo o seu termo geral

$$\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}$$

tende para 0, quando n tende para o infinito. Como porém esta quantidade coincide com o producto dos dois primeiros factores da expressão do resto R_n, e como além d'isso o factor $(1+\theta x)^{k-1}$ é finito e o factor $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é inferior á unidade, este resto tende tambem para 0, e temos a fórmula, descoberta por Newton:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-a+1)}{a!}x^a + \dots$$

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, a serie precedente é divergente, e esta egualdade não tem logar. Com effeito, a razão de dois termos consecutivos, isto é,

$$\frac{k-a+1}{a}x = \left(\frac{k+1}{a}-1\right)x,$$

tende para um limite $-x$, cujo valor absoluto é superior á unidade, quando n tende para o infinito (n.º 22-III).

117. Do desenvolvimento em serie do binomio, que vimos de obter, póde tirar-se o desenvolvimento em serie de muitas outras funcções.

Assim, suppondo $f(x)$ uma funcção racional de x, em que o grau de x no numerador seja inferior ao grau de x no denominador, da egualdade (n.º 42)

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{p_0 + p_1 x + \dots + p_s x^s}$$

$$= \sum \frac{A}{(x-a)^k} = \sum (-1)^k \frac{A}{a^k}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-k}$$

tira-se o desenvolvimento em serie

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots,$$

onde é

$$A_0 = \Sigma(-1)^k \frac{A}{a^k}, \ldots, A_n = \Sigma(-1)^k \binom{k}{n} \frac{A}{a^{k+n}}, \ldots,$$

a qual tem logar quando o valor absoluto de x é inferior ao menor dos valores absolutos das quantidades designadas por a[1].

Convem notar que, para obter os coefficientes A_0, A_1, A_2, etc. da serie que vem de ser considerada, não é necessario conhecer as raizes da equação $\psi(x)=0$, pois que podem ser obtidos directamente, derivando a fracção dada, ou por meio das relações que resultam da egualdade

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = (p_0 + p_1 x + \ldots + p_i x^i)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots),$$

effectuando a multiplicação indicada no segundo membro, ordenando o resultado segundo as potencias de x e egualando os coefficientes das mesmas potencias de x nos dois membros. Vêem, com effeito, d'este modo a relação

$$a_n = p_0 A_n + p_1 A_{n-1} + \ldots + p_n A_0,$$

onde $a_{m+1} = 0$, $a_{m+2} = 0, \ldots$, a qual tem logar quando $n < i$, e a relação

$$0 = p_0 A_n + p_1 A_{n-1} + \ldots + p_i A_{n-i},$$

a qual tem logar quando $n \geqq i$, por meio das quaes se calculam successivamente os coefficientes A_0, A_1, A_2, etc.

Vê-se pelo que precede que os coefficientes do desenvolvimento procurado, a partir de A_i, estão ligados com os i anteriores por uma relação linear homogenea. As series cujos termos satisfazem a esta condição, dizem-se *recorrentes*. Foram estudadas por Moivre na sua *Miscellanea analytica*, e depois por Euler, Lagrange, etc. Podem ver-se diversos modos de calcular os seus coefficientes e a sua relação com uma classe importante de funcções symetricas em um trabalho que publicámos em 1904 no *Giornale di Matematiche* (Napoli, tom. XLII)[2].

118. Desenvolvamos agora a funcção

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

em serie ordenada segundo as potencias de u.

(1) Suppomos por agora que todas as raizes de $\psi(x)=0$ são reaes. Adiante veremos porém que o desenvolvimento considerado ainda tem logar quando alguma d'estas raizes são imaginarias, se o valor absoluto de x é inferior ao valor absoluto de todas as raizes reaes e ao modulo das imaginarias.

(2) *Obras sobre Mathematica*, tom. II.

Pondo esta funcção debaixo da fórma

$$y = (u - u_1)^{-\frac{1}{2}} (u - u_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (u_1 u_2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

onde u_1 e u_2 representam as raizes da equação

$$u^2 - 2ux + 1 = 0,$$

vê-se que um dos casos em que ella é susceptivel de ser desenvolvida em serie convergente ordenada segundo as potencias de u, é quando u_1 e u_2 são reaes e o valor absoluto de u é inferior ao de u_1 e u_2 [1].

Em todos os casos em que y é susceptivel de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de u, o desenvolvimento é da fórma

$$y = X_0 + X_1 u + X_2 u^2 + \ldots + X_k u^k + \ldots,$$

onde X_0, X_1, etc. representam funcções de x, que vamos determinar.

Por ser (n.º 105-IV)

$$y^{(k)} = \Sigma \frac{k!\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-i+1\right)(-2x+2u)^{\alpha}2^{\beta}y^{2i+1}}{\alpha!\,\beta!\,2^{\beta}}$$

$$= \Sigma(-1)^{\beta}.\frac{k!\,1.3.5\ldots(2i-1)(x-u)^{\alpha}y^{2i+1}}{\alpha!\,\beta!\,2^{\beta}},$$

onde

$$\alpha + 2\beta = k, \quad i = \alpha + \beta,$$

teremos, representando m o maior inteiro contido em $\frac{k}{2}$:

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \sum_{\beta=0}^{m}(-1)^{\beta}.\frac{1.3.5\ldots(2k-2\beta-1)}{(k-2\beta)!\,\beta!\,2^{\beta}}x^{k-2\beta}.$$

---

(1) Veremos adiante que o desenvolvimento considerado ainda tem logar quando, u_1 e u_2 sendo imaginarios, $|u|$ é inferior a $|u_1|$ e $|u_2|$.

Esta fórmula serve para calcular os polynomios X_k, conhecidos pelo nome de *polynomios de Legendre,* por terem sido estudados por este geometra eminente em um trabalho publicado em 1785 nas *Memorias da Academia das Sciencias de Paris.* Vamos estudar algumas das suas propriedades mais elementares.

I. Derivando k vezes a identidade

$$(x^2-1)^k = \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} x^{2k-2\beta},$$

vem

$$\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} = \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} (2k-2\beta)\dots(k-2\beta+1)\, x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} \cdot \frac{(2k-2\beta)!}{(k-2\beta)!} x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^\beta \cdot \frac{k\dots(k-\beta+1)\cdot 1.3\dots(2k-2\beta-1)\cdot 2.4\dots(2k-2\beta)}{\beta!\,(k-2\beta)!} x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{m} (-1)^\beta \cdot \frac{1.3\dots(2k-2\beta-1)\, 2^{k-\beta} k!}{\beta!\,(k-2\beta)!} x^{k-2\beta}.$$

Comparando esta egualdade com a expressão de X_k anteriormente achada, deduz-se a fórmula notavel, devida a Olinde Rodrigues,

$$X_k = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}.$$

II. Derivando a funcção

$$y = (1-2ux+u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

relativamente a u, vem

$$y' = (x-u)(1-2ux+u^2)^{-\frac{3}{2}},$$

e portanto

$$y'(1-2ux+u^2) = (x-u)\,y.$$

Derivando agora k vezes esta equação, temos (n.º 105-II)

$$y^{(k+1)}(1-2ux+u^2) - ky^{(k)}(2x-2u) + 2\binom{k}{2} y^{(k-1)} = y^{(k)}(x-u) - ky^{(k-1)},$$

e portanto, pondo $u=0$,

$$y_0^{(k+1)} - (2k+1)\,x y_0^{(k)} + k^2 y_0^{(k-1)} = 0.$$

Esta equação, pondo $X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!}$, dá

$$(k+1)\,X_{k+1} - (2k+1)\,x X_k + k X_{k-1} = 0.$$

Temos assim uma relação *linear recorrente* entre tres polynomios consecutivos de Legendre, por meio da qual se podem formar successivamente estes polynomios a partir do terceiro.

III. Como a equação $(x^2-1)^k=0$ tem k raizes eguaes a $+1$ e k raizes eguaes a -1, a equação $\frac{d(x^2-1)^k}{dx}=0$ terá $k-1$ raizes eguaes a $+1$, $k-1$ raizes eguaes a -1 e (em virtude do theorema de Rolle) uma raiz real comprehendida entre $+1$ e -1.

Pela mesma razão, a equação $\frac{d^2(x^2-1)^k}{dx^2}=0$ terá $k-2$ raizes eguaes a $+1$, $k-2$ raizes eguaes a -1 e duas raizes deseguaes comprehendidas entre $+1$ e -1.

Continuando o mesmo raciocinio, conclue se emfim que *a equação* $X_k=0$ *tem* k *raizes reaes e deseguaes, comprehendidas entre* $+1$ *e* -1 (Legendre).

IV. Pondo $(x^2-1)^k = z$, temos

$$k \log (x^2-1) = \log z,$$

e, derivando,

$$(x^2-1)\,z' - 2kxz = 0.$$

Derivando $k+1$ vezes esta equação, vem

$$(x^2-1)\,z^{(k+2)} + 2(k+1)\,xz^{(k+1)} + k(k+1)\,z^{(k)} - 2k\left[xz^{(k+1)} + (k+1)\,z^{(k)}\right] = 0,$$

ou, pondo $z^{(k)} = 2^k k!\, X_k$ e fazendo as reducções,

$$(x^2-1)\,X_k'' + 2x X_k' - k(k+1)\,X_k = 0.$$

Os polynomios de Legendre são pois soluções de uma equação differencial linear de segunda ordem (Legendre).

V. Da relação entre tres polynomios de Legendre consecutivos (II) vamos tirar o limite para que tende a razão $\frac{X_k}{X_{k-1}} = A_k$, quando k augmenta indefinidamente, suppondo $|x|>1$.

Dividindo primeiramente esta relação por $k\, X_{k+1}$, vem

$$1 + \frac{1}{k} - \left(2 + \frac{1}{k}\right) x A_k + A_k A_{k-1} = 0.$$

Consideremos em seguida a relação

$$1 - 2x B_k + B_k B_{k-1} = 0,$$

que determina uma serie de funcções B_0, B_1, etc., dada uma d'ellas B_0, que supporemos ser egual a A_0.

Chamando z_1 e z_2 as raizes da equação

$$1 - 2xz + z^2 = 0$$

e notando que é $z_1 + z_2 = 2x$, $z_1 z_2 = 1$, podemos escrever a equação precedente debaixo da fórma

$$B_k B_{k-1} - (z_1 + z_2) B_k + z_1 z_2 = 0,$$

ou

$$\frac{B_k - z_1}{B_k - z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{B_{k-1} - z_1}{B_{k-1} - z_2}.$$

Mudando n'esta equação successivamente k em $k-1$, $k-2$, $k-3$, ..., 2, 1, vem uma serie de equações, das quaes se deduz

$$\frac{B_k - z_1}{B_k - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^k \frac{B_0 - z_1}{B_0 - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^k \frac{A_0 - z_1}{A_0 - z_2}.$$

Esta egualdade mostra que B_k tende para o limite z_1, quando k augmenta indefinidamente, se é $|z_2| > |z_1|$, e que tende para o limite z_2, se é $|z_2| < |z_1|$.

Por outra parte, se na equação de que se partiu substituirmos as quantidades A_k e A_{k-1} por B_k e B_{k-1}, obtem-se o resultado $\frac{1}{k}(1 - xB_k)$, que tende para 0 quando k tende para ∞; e vê-se portanto que A_k e B_k tendem para um mesmo limite, quando k tende para ∞.

Logo *a razão* A_k *de dois polynomios de Legendre consecutivos tenderá para aquella das quantidades* $x + \sqrt{x^2 - 1}$ *e* $x - \sqrt{x^2 - 1}$ *que tiver menor valor absoluto, quando* k *augmenta indefinidamente.*

II

Desenvolvimento em serie de algumas funcções transcendentes

119. *Exponencial.* — Principiemos pela exponencial $y=e^x$, que dá $y^{(n)}=e^x$, e portanto $y_0^{(n)}=1$.

Applicando a fórmula de Maclaurin, com a expressão do resto de Lagrange, vem

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\mathrm{R}_n,\quad \mathrm{R}_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}.$$

Suppondo x comprehendido entre os dois inteiros m e $m+1$, o resto R_n é o producto dos tres factores

$$\frac{x^m}{m!},\ \frac{x}{m+1}\cdot\frac{x}{m+2}\cdots\frac{x}{n},\ e^{\theta x},$$

dos quaes o primeiro e o terceiro são finitos, e o segundo, por ser menor do que $\frac{x}{n}$, tende para zero, quando n tende para o infinito. Logo R_n tende tambem para 0, e temos o desenvolvimento em serie, descoberto por Newton,

$$(1)\qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

que tem logar qualquer que seja o valor de x.

I. Se x for positivo e menor do que $n+1$, temos

$$\mathrm{R}_n<\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots<\frac{x^n}{n!}\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\ldots\right]$$

e portanto, sommando a progressão que entra no segundo membro,

$$\mathrm{R}_n<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{n+1}{n+1-x}.$$

Se x for negativo e inferior, em valor absoluto, a $n+1$, temos (n.º 22-VII)

$$\mathrm{R}_n<\frac{x^n}{n!}.$$

Por meio d'estas fórmulas calcula-se um limite superior do erro que se commette, quando se toma para valor de e^x a somma dos n primeiros termos do seu desenvolvimento.

II. Pondo na fórmula (1) $x=0$, vem

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Por esta serie calcula-se o valor de e mais rapidamente do que pelo processo indicado no n.º 30.

Este numero e é irracional. Com effeito, se e fosse egual a uma fracção $\frac{m}{n}$, teriamos

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots,$$

e portanto

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots$$

$$< \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right]$$

ou

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!\,n}$$

ou

$$(n-1)!\,m - 2(n!) - \ldots - 1 < \frac{1}{n};$$

e portanto o numero inteiro positivo, que o primeiro membro d'esta egualdade representa, seria menor do que uma fracção, o que é absurdo.

Lambert demonstrou que todas as potencias inteiras de e são irracionaes, e modernamente Hermite demonstrou que este numero é transcendente, isto é, que não póde ser raiz de uma equação algebrica com coefficientes racionaes [1].

120. *Logarithmo de* $(1+x)$. — Consideremos agora a funcção $y = \log(1+x)$.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LXXVII. Veja-se tambem no tom. CXVI uma demonstração muito elementar da mesma proposição, devida a *Hurwitz*.

Por ser

$$y' = (1+x)^{-1},\ y'' = -(1+x)^{-2},\ y''' = (-1)^2(1+x)^{-3},\ \dots,$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n},$$

a fórmula de Maclaurin dá, empregando a expressão do resto de Cauchy,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + \mathrm{R}_n,$$
$$\mathrm{R}_n = (-1)^{n-1}.\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1}x^n\frac{1}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}.$$

1) Se x estiver comprehendido entre $+1$ e -1, a fracção $\frac{1}{1+\theta x}$ é finita, a fracção $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ é menor do que a unidade e x^n tende para zero, quando n tende para o infinito. Logo R_n tem por limite zero, quando n augmenta indefinidamente, e a funcção proposta póde ser desenvolvida em serie pela seguinte fórmula, publicada em 1668 por Mercator na sua *Logarithmotechnica:*

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^a}{a} \mp \dots$$

É facil ver, empregando a expressão do resto de Lagrange, que esta fórmula ainda subsiste quando $x=1$.

2) Se o valor absoluto de x for superior á unidade, esta serie é divergente (n.º 22-III), visto que a razão dos dois termos consecutivos $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ e $\frac{x^a}{a}$ tende para o limite x, quando a tende para ∞. Tambem é divergente quando $x=-1$.

I. Da fórmula precedente deduz-se outra, adoptada ao calculo dos logarithmos dos numeros inteiros. Ponhamos para isso

$$x = \frac{p-q}{p+q},$$

o que dá

$$\frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x},$$

e portanto

$$\begin{aligned}\log p - \log q &= \log(1+x) - \log(1-x)\\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right)\\ &= 2\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n + \dots\right],\end{aligned}$$

onde n é impar.

Esta serie é tanto mais convergente quando menor for $p-q$ e maior for $p+q$, e serve para calcular $\log p$, quando $\log q$ é conhecido. Pondo $q=1$, dá immediatamente $\log p$.

O erro que se commette parando no termo de grau $n-2$ d'esta serie é inferior á somma da progressão

$$\frac{2}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n\left[1+\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2+\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^4+\dots\right],$$

isto é, ao numero

$$\frac{(p-q)^n}{2npq(p+q)^{n-2}}.$$

121. *Funcções circulares*. — I. Consideremos a funcção $y=\operatorname{sen} x$. Temos, applicando a fórmula de Maclaurin,

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\mp\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\operatorname{sen}\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

e portanto, visto que $\operatorname{sen}\left(\theta x+n\frac{\pi}{2}\right)$ é finito e $\frac{x^n}{n!}$ tende para zero, quando n augmenta indefinidamente,

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{3!}+\dots\pm\frac{x^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)!}\mp\dots,$$

qualquer que seja x.

II. Do mesmo modo se acha o desenvolvimento em serie de $\cos x$:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\pm\frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)!}\mp\dots$$

As funcções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ appareceram pela primeira vez na Trigonometria, e ahi foram obtidas geometricamente as suas propriedades. Definindo estas funcções pelas series precedentes, descobertas por Newton, póde constituir-se analyticamente toda a sua theoria ([1]).

III. Applicando finalmente a fórmula de Maclaurin á funcção $y=\operatorname{arc\,tang} x$, vem (n.º 106), considerando o valor de y comprehendido entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{arc\,tang} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n,$$

$$R_n=(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\operatorname{sen}^n\varphi\operatorname{sen} n\varphi.$$

([1]) Tannery: *Introduction à la théorie des fonctions*, 1886, pag. 153. — Godefroy: *Théorie élémentaire des séries*, 1903, pag. 149.

*

onde φ é dado pela egualdade $\theta x = \cot \varphi$. Logo, quando x é egual ou inferior á unidade, R_n tende para zero, quando n tende para o infinito, e temos o desenvolvimento, descoberto por J. Gregory,

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^a}{a} \mp \ldots$$

Se é $|x| > 1$ a serie precedente é divergente.

É um corollario da fórmula precedente a seguinte expressão de π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

III

Interpolação

122. O fim da interpolação é procurar uma funcção $f(x)$ que, quando a x se dão os valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, tome valores $y_1, y_2, \ldots, y_k$ dados.

Este problema é indeterminado, quando se não dá a fórma da funcção. Aqui supporemos que se quer que a funcção $f(x)$ seja inteira e do grau $k-1$, e n'este caso satisfaz evidentemente ao problema a funcção dada pela fórmula seguinte, devida a Lagrange:

$$f(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_k)} y_1$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_k)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_k)} y_2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})} y_k.$$

Emprega-se tambem muitas vezes, para resolver o mesmo problema, o methodo seguinte, devido a Newton.

Ponha-se

$$f(x) = A + B(x-x_1) + C(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$$
$$+ M(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})$$

e determinem-se os coefficientes A, B, C, ..., M de modo que y tome os valores $y_1, y_2, \ldots, y_k$, quando x toma os valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Temos primeiramente, pondo $x = x_1$, $A = y_1$. Pondo depois $x = x_2$, vem a egualdade

$$y_2 = y_1 + B(x_2 - x_1),$$

que determina B. A egualdade

$$y_3 = y_1 + B(x_3 - x_1) + C(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

determina depois C. Continuando do mesmo modo, determinam-se todos os coefficientes da fórmula anterior.

As expressões analyticas d'estes coefficientes em funcção de x_1, x_2, etc. e de y_1, y_2, etc. foram dadas por Ampère em um trabalho publicado no tomo XVI dos *Annales de Gergonne.*

I. Para o caso particular em que temos

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_k - x_{k-1} = h$$

deu Newton uma fórmula notavel, que vamos demonstrar.

Representemos, como no n.º 111, por $\Delta f(x)$ o augmento que recebe $f(x)$, por $\Delta^2 f(x)$ o augmento que recebe $\Delta f(x)$, etc., quando x recebe o augmento h; temos

$$f(x_1 + h) = f(x_1) + \Delta f(x_1),$$
$$f(x_1 + 2h) = f(x_1) + 2\Delta f(x_1) + \Delta^2 f(x_1),$$
$$f(x_1 + 3h) = f(x_1) + 3\Delta f(x_1) + 3\Delta^2 f(x_1) + \Delta^3 f(x_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Obtem-se d'este modo, por inducção, a fórmula geral

$$f(x_1 + nh) = f(x_1) + n\Delta f(x_1) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(x_1)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 f(x_1) + \ldots,$$

que se demonstra por um methodo analogo ao que foi empregado no n.º 105-II em uma questão semelhante.

Pondo agora n'esta relação $x_1 + nh = x$, vem a fórmula de Newton

$$f(x) = f(x_1) + \frac{(x - x_1)}{h}\Delta f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{1.2h^2}\Delta^2 f(x_1)$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{1.2.3h^3}\Delta^3 f(x_1) + \ldots,$$

que pretendiamos obter. Foi d'esta fórmula que Taylor partiu para achar a serie conhecida pelo seu nome.

II. A doutrina precedente applica-se ao calculo approximado dos valores que tem uma funcção F (x), em um ponto qualquer x, quando se conhecem os valores $y_1, y_2, \ldots, y_k$, que esta funcção tem nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Com effeito, a differença $F(x) - f(x)$ devendo ser nulla nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$, temos

$$F(x) - f(x) = K(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k).$$

Consideremos agora a funcção

$$\varphi(z) = F(z) - f(z) - K(z - x_1) \ldots (z - x_k),$$

a qual se annulla nos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k, x$, e supponhamos que as funcções $f(z), f'(z), \ldots, f^{(k)}(z)$ são finitas no intervallo comprehendido entre o maior M e o menor m d'estes numeros. A derivada $\varphi'(z)$ deve annullar-se em k pontos, comprehendidos entre m e M, a derivada $\varphi''(z)$ em $k-1$ pontos, comprehendidos entre os precedentes, etc. Vê-se finalmente que $\varphi^{(k)}(z)$ se deve annullar em um ponto X, comprehendido entre m e M. Notando agora que $f^{(k)}(z) = 0$, por ser egual a $k-1$ o grau de $f(z)$, podemos escrever

$$\varphi^{(k)}(X) = F^{(k)}(X) - k!\,K = 0,$$

e por anto

$$F(x) = f(x) + \frac{1}{k!} F^{(k)}(X)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k).$$

Vê-se pois que o polynomio $f(x)$, precedentemente determinado, tende para F (x), quando k tende para ∞, no caso de a expressão

$$R = \frac{1}{k!} F^{(k)}(X)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k),$$

que se chama *resto,* tender para 0.

O methodo para o calculo approximado das quantidades que vem de ser considerado, foi dado por Newton no seu *Methodus differentialis,* publicado em 1711, e applicado por este grande geometra ao calculo das áreas planas. A expressão do resto que vem de ver-se foi dada por Ampère no trabalho precedentemente mencionado. Mais tarde será dada outra, devida a Hermite.

Quando a escolha dos numeros $x_1, x_2, \ldots, x_k$, que entram na questão considerada, se poder fazer de um modo arbitrario, convem dar-lhes os valores $h \cos \frac{\pi}{2k}$, $h \cos \frac{3\pi}{2k}$, $\ldots$, $h \cos \frac{(2k-1)\pi}{2k}$ (h e $-h$ representando os valores entre os quaes varia x), para obter os resul-

tados mais rapidamente convergentes. Póde ver-se a demonstração d'esta proposição, devida a Tchebicheff, no *Calcul différentiel* de Bertrand, e podem ver-se outras vantagens do emprego d'estes numeros na nossa memoria sobre a convergencia da fórmula de interpolação de Lagrange, publicada no tomo CXXVI do *Jornal de Crelle* [1].

123. Consideremos agora o caso mais geral de serem dados os valores que tomam a funcção $f(x)$ e suas derivadas, quando á variavel x se dão valores particulares.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ os valores dados a x, e sejam os valores correspondentes da funcção e suas derivadas os seguintes:

$$
\begin{array}{l}
y_1,\ y'_1,\ \ldots,\ y_1^{(\alpha-1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_i,\ y'_i,\ \ldots,\ y_i^{(\beta-1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k,\ y'_k,\ \ldots,\ y_k^{(\lambda-1)}.
\end{array}
$$

Ponhamos [2]

$$f_1(x) = (x - x_1)^\alpha \ldots (x - x_i)^\beta \ldots (x - x_k)^\lambda$$

e (n.º 42-I)

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{M_1}{x - x_i} + \frac{M_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{M_\beta}{(x - x_i)^\beta} \right],$$

onde $M_1, M_2, \ldots, M_\beta$ são os coefficientes de $h^{\beta-1}, h^{\beta-2}, \ldots, h^0$ no quociente $\dfrac{h^\beta f(x_i + h)}{f_1(x_i + h)}$.

Por outra parte, representando por $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha; \ldots; B_1, B_2, \ldots, B_\beta; \ldots$ os numeradores das fracções simples em que se decompõe a fracção $\dfrac{1}{f_1(x)}$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{f_1(x)} = {} & \frac{A_1 f(x)}{x - x_1} + \frac{A_2 f(x)}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x - x_1)^\alpha} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{B_1 f(x)}{x - x_i} + \frac{B_2 f(x)}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta f(x)}{(x - x_i)^\beta} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{P_1 f(x)}{x - x_k} + \frac{P_2 f(x)}{(x - x_k)^2} + \ldots + \frac{P_\lambda f(x)}{(x - x_k)^\lambda}.
\end{aligned}
$$

---

[1] *Obras sobre Mathematica*, t. I.

[2] A analyse que segue é tirada do nosso artigo *Sur une formule d'interpolation*, publicado nas *Memorias da Sociedade Real das Sciencias de Liège* (2.ª serie, tom. X).

Pondo $x = x_i + h$, multiplicando por h^β e ordenando segundo as potencias de h, vem

$$\frac{h^\beta f(x_i + h)}{f_1(x_i + h)} = B_1 \left[h^{\beta-1} f(x_i) + h^\beta f'(x_i) + \ldots \right]$$

$$+ B_2 \left[h^{\beta-2} f(x_i) + h^{\beta-1} f'(x_i) + \frac{1}{2} h^\beta f''(x_i) + \ldots \right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ B_\beta \left[f(x_i) + h f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-1)!} h^{\beta-1} f^{(\beta-1)}(x_i) + \ldots \right]$$

$$+ Rh^\beta,$$

onde o termo Rh^β contem as potencias de h, eguaes e superioresa β, que resultam dos termos

$$\frac{A_1 h^\beta f(x_i + h)}{x_i - x_1 + h}, \quad \frac{A_2 h^\beta f(x_i + h)}{(x_i - x_1 + h)^2}, \text{ etc.}$$

da funcção considerada em que não entram $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_\beta$.

Temos pois

$$M_1 = B_1 f(x_i) + B_2 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-1)!} B_\beta f^{(\beta-1)}(x_i),$$

$$M_2 = B_2 f(x_i) + B_3 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-2)!} B_\beta f^{(\beta-2)}(x_i),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_\beta = B_\beta f(x_i);$$

e portanto

$$f(x) = f_1(x) \sum_{i=1}^{l} \left\{ \left[\frac{B_1}{x - x_i} + \frac{B_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x - x_i)^\beta} \right] y \right.$$

$$+ \left[\frac{B_2}{x - x_i} + \frac{B_3}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x - x_i)^{\beta-1}} \right] y'$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left. + \frac{1}{(\beta-1)!} \cdot \frac{B_\beta}{x - x_i} y^{(\beta-1)} \right\}.$$

Esta fórmula dá uma funcção inteira do grau $\alpha + \beta + \ldots + \lambda - 1$, que resolve a questão

proposta. Vê-se que, para a applicar, é necessario decompôr em fracções simples a fracção $\frac{1}{f_1(x)}$.

A questão de que vimos de nos occupar foi considerada por Hermite no tomo LXXXIV do *Jornal de Crelle,* onde deu as condições para que uma funcção dada possa ser representada por $f(x)$ com um grau de approximação tanto maior, quanto maior forem os valores de k, α, β, etc. Estas condições serão consideradas em outro logar d'esta obra.

IV

Desenvolvimento em serie das funcções implicitas

124. A fórmula de Maclaurin applica-se tanto ás funcções explicitas como ás funcções implicitas. Aqui vamos fazer applicação d'ella á funcção implicita y definida pelas equações

$$y = f(u),\quad u = t + x\varphi_1(u) + x^2\varphi_2(u) + \ldots + x^k\varphi_k(u),$$

que vamos desenvolver em serie ordenada segundo as potencias de x.

Derivando a segunda equação relativamente a x e a t, vem

$$\frac{du}{dx} = \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \ldots + kx^{k-1}\varphi_k(u) + [x\varphi_1'(u) + x^2\varphi_2'(u) + \ldots + x^k\varphi_k'(u)]\frac{du}{dx},$$

$$\frac{du}{dt} = 1 + [x\varphi_1'(u) + \ldots + x^k\varphi_k'(u)]\frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}[\varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \ldots + kx^{k-1}\varphi_k(u)]$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \theta_1\frac{du}{dt},$$

pondo

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(u) + \ldots + kx^{k-1}\varphi_k(u).$$

Mas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt};$$

logo teremos

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1 \frac{dy}{dt}.$$

Derivando esta equação relativamente a x e a t e chamando θ_2 a derivada de θ_1 relativamente a x, considerando u como constante, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dt}\theta_1 + \frac{dy}{dt}\left[\theta_2 + \theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt}\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx\,dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\theta_1 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\theta_1}{du} \cdot \frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\theta_1^2 + \frac{dy}{dt}\left[\theta_2 + 2\theta_1 \frac{d\theta_1}{du} \frac{du}{dt}\right]$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\theta_1^2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\theta_2.$$

Derivando esta equação relativamente a x, obtem-se do mesmo modo

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2\left(\frac{dy}{dt}\theta_1^3\right)}{dt^2} + 3\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\theta_1\theta_2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\theta_3,$$

e assim successivamente.

Em geral, podemos pôr

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A \frac{d^{i-1}\left(\frac{dy}{dt}\theta_1^\alpha \theta_2^\beta \ldots \theta_k^\lambda\right)}{dt^{i-1}};$$

sendo A, i, α, β, etc. numeros inteiros que vamos determinar.

Para isso, appliquemos a fórmula precedente á funcção definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x + x^2 + \ldots + x^k,$$

o que dá

$$\theta_1 = 1 + 2x + \ldots + kx^{k-1} = \frac{du}{dx},\ \theta_2 = \frac{d^2u}{dx^2},\ \theta_3 = \frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.};$$

e teremos

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma A \frac{d^i y}{dt^i} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^\beta \cdots \left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^\lambda.$$

Por outra parte, temos (n.º 105-IV)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(2!)^\beta\ldots(k!)^\lambda} \frac{d^i y}{du^i} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)^\beta \cdots,$$

onde Σ se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + k\lambda = n$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Comparando as duas fórmulas precedentes, obtem-se o valor de A e os de α, β, ..
Vem pois

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!(2!)^\beta\ldots(k!)^\lambda} \cdot \frac{d^{i-1}\left[\frac{dy}{dt}\theta_1^\alpha\theta_2^\beta\ldots\theta_k^\lambda\right]}{dt^{i-1}}.$$

Pondo agora $x = 0$ nas fórmulas

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + 2x\varphi_2(x) + \ldots + kx^{k-1}\varphi_k(u),$$
$$\theta_2 = 2\varphi_2(u) + 2.3x\varphi_3(u) + \ldots + k(k-1)x^{k-2}\varphi_k(u),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta = k!\varphi_k(u),$$

vem

$$\theta_1 = \varphi_1(u),\ \theta_2 = 2!\varphi_2(u),\ \ldots,\ \theta_k = k!\varphi_k(u),$$
$$\theta_{k+1} = 0_{k+2} = \ldots = 0;$$

e portanto

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{d^{i-1}\left[f'(t)(\varphi_1(t))^\alpha(\varphi_2(t))^\beta\ldots(\varphi_k(t))^\lambda\right]}{dt^{i-1}},$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \ldots + k\lambda = n, \quad i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

*

Applicando á funcção proposta a fórmula de Maclaurin, vem pois o desenvolvimento pedido:

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \frac{d^{n-1}\left[f'(t)(\varphi_1(t))^\alpha \ldots (\varphi_k(t))^\lambda\right]}{dt^{n-1}} + \mathrm{R}.$$

D'esta fórmula, que publicámos no nosso artigo *Sur le développement des fonctions implicites* (*Journal de Mathématiques de Liouville,* 3.ª serie, tom. VII), tira-se, pondo $k = 1$, a fórmula notavel

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}\left[f'(t)(\varphi_1(t))^n\right]}{dt^{n-1}} + \mathrm{R},$$

devida a Lagrange [1], que dá o desenvolvimento em serie da funcção y definida pelas equações

$$y = f(u), \quad u = t + x\varphi_1(u).$$

As condições de convergencia das series precedentes, que se não podem tirar da consideração do resto, por ser muito complicado, serão dadas n'outra parte d'este Curso.

V

Maximos e minimos [2]

125. Diz-se que a funcção $y = f(x)$ é *maxima* ou tem um valor *maximo* no ponto $x = x_1$, quando o valor $f(x_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella tem nos pontos visinhos de x_1; isto é, quando existe um numero h_1, tal que a desegualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

seja satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* ou tem um valor *minimo* no ponto $x = x_1$, se existe um numero h_1, tal que a desegualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

seja satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$.

---

(1) *Oeuvres*, tom. III, pag. 25.

(2) Foi Fermat o primeiro inventor de um methodo geral para determinar os valores maximos e minimos das funcções. Newton e Leibnitz applicaram a esta questão o methodo differencial.

Se a funcção dada tem uma derivada finita no ponto x_1, a funcção cresce com x na visinhança d'este ponto, se o numero $f'(x_1)$ é positivo, e decresce, se este numero é negativo (n.º 63). Logo, para que no ponto x_1 a funcção tenha um valor maximo ou minimo, deve ser $f'(x_1) = 0$.

Supponhamos pois que é $f'(x_1) = 0$ e que a funcção $f(x)$ tem no ponto x_1 uma derivada de segunda ordem finita e differente de zero. Temos (n.os 55 e 63)

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = h f'(x_1 + \theta h) = \theta h^2 [f''(x_1) + \varepsilon_1],$$

onde ε_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com h e θ uma quantidade positiva menor do que a unidade. Mas, attendendo a que ε_1 tende para 0 com h, vê-se que existe um numero positivo h_1, tal que a desegualdade $|\varepsilon_1| < |f''(x_1)|$ é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre h_1 e $-h_1$, e portanto que $f''(x_1) + \varepsilon_1$ tem o signal de $f''(x_1)$ no intervallo considerado. Logo a desegualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0,$$

é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1, se o numero $f''(x_1)$ é positivo, ou a desegualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0,$$

se o numero $f''(x_1)$ é negativo; e portanto a $x = x_1$ corresponde um valor minimo de y, quando $f''(x_1)$ é positivo, um valor maximo, quando $f''(x_1)$ é negativo.

Se for $f''(x_1) = 0$ e se a funcção $f(x)$ tiver uma derivada de terceira ordem finita e differente de zero no ponto x_1, temos a egualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{1}{2} h^2 f''(x_1 + \theta h) = \frac{1}{2} \theta h^3 [f'''(x_1) + \varepsilon_2],$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h; e esta egualdade, attendendo a que existe um numero h_1, tal que a desegualdade $|\varepsilon_2| < |f'''(x_1)|$ é satisfeita pelos valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e h_1, mostra que o signal da differença $f(x_1 + h) - f(x_1)$ muda com o signal de h, quando h varia desde $-h_1$ até h_1. Logo no ponto x_1 a funcção $f(x)$ não póde ter valor maximo nem minimo.

Continuando do mesmo modo, obtem-se a regra seguinte, para achar os valores de x que tornam a funcção y maxima ou minima:

Resolva-se a equação $f'(x) = 0$ e substitua-se cada um dos valores obtidos para x nas derivadas seguintes $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., até encontrar uma $f^{(n)}(x)$ que não se annulle. Se esta derivada for de ordem impar, ao valor de x considerado não corresponde nem maximo nem minimo; se for de ordem par, ao valor de x considerado corresponde um maximo, se este valor tornar a derivada $f^{(n)}(x)$ negativa, corresponde um minimo, se a tornar positiva.

Substituindo depois estes valores de x na funcção proposta, obtêem-se os valores maximos e minimos procurados.

EXEMPLOS: 1.º Para achar os valores de x que tornam maxima ou minima a funcção

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4,$$

temos de resolver a equação

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0,$$

que dá $x = 1$ e $x = 2$,

Substituindo o valor $x = 1$ na derivada

$$y'' = 12x - 18,$$

vem um resultado negativo; portanto a $x = 1$ corresponde um maximo $y = 1$ da funcção considerada.

Substituindo o valor $x = 2$ na mesma derivada, vem um resultado positivo; portanto a $x = 2$ corresponde um minimo $y = 0$.

2.º Achar o rectangulo de perimetro dado que tem maior área, e o rectangulo da área dada que tem menor perimetro.

Sejam x e y o comprimento dos lados do rectangulo e $2l$ o perimetro. Temos, representando por S a sua área,

$$y = l - x, \quad S = x(l - x),$$

e portanto

$$S' = l - 2x, \quad S'' = -2.$$

Pondo $S' = 0$, vem $x = \frac{1}{2}l$ e portanto $y = \frac{1}{2}l$. Logo o quadrado é o maior dos rectangulos considerados.

Seja agora $xy = a^2$, a representando uma quantidade dada. Temos

$$l = x + y = x + a^2x^{-1}$$

e portanto

$$l' = 1 - a^2x^{-2}, \quad l'' = 2a^2x^{-3}.$$

Pondo agora $l' = 0$ e considerando sómente a solução positiva d'esta equação, que é a unica que satisfaz ao problema enunciado, vem $x = a$, e portanto $y = a$. Logo o quadrado é o menor dos rectangulos que têem uma área de valor dado.

3.º No caso da funcção $y = \cos\frac{1}{x}$, temos de resolver a equação

$$y' = \frac{1}{x^2}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0,$$

que dá, considerando só os valores positivos de x, $x = \frac{1}{k\pi}$, onde $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

A derivada segunda

$$y'' = -\frac{2}{x^3}\,\text{sen}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x}$$

dá $y'' = -k^4\pi^4\cos k\pi$; logo a $x = \frac{1}{\pi}$, $x = \frac{1}{2\pi}$, etc. correspondem alternadamente o minimo -1 e o maximo $+1$.

Temos aqui o primeiro exemplo de uma funcção que, quando x se approxima indefinidamente de zero, oscilla entre $+1$ e -1; de modo que, entre zero e um outro valor qualquer dado a x, tem um numero infinito de maximos e minimos. No ponto $x = 0$ a funcção é indeterminada.

126. Pela regra precedente acham-se os pontos em que a funcção $f(x)$ é maxima ou minima e admitte uma derivada finita. Para achar pois todos os pontos em que $f(x)$ é maxima ou minima, é necessario considerar ainda os pontos em que esta funcção não admitte derivada, e os pontos em que a derivada é infinita.

Seja x_1 um d'estes pontos. Para ver se n'elle a funcção é maxima ou minima, basta ver se $f'(x_1 + h)$ muda ou não de signal com h, quando h varía desde $-h_1$ até h_1. Com effeito, se $f'(x_1 + h)$ muda de signal com h e passa de negativa para positiva, a funcção $f(x)$ passa de (n.º 63) decrescente para crescente, e portanto no ponto x_1 é minima. Se $f'(x_1 + h)$ muda de signal com h e passa de positiva para negativa, a funcção $f(x)$ é maxima no ponto x_1. Se $f'(x_1 + h)$ não muda de signal com h, a funcção $f(x)$ não é maxima nem minima no ponto x_1.

Applica-se este mesmo methodo quando se procuram os maximos e minimos correspondentes aos pontos que satisfazem á equação $f'(x) = 0$, se a funcção $f(x)$ não admitte no ponto x_1 algumas das derivadas a que é necessario recorrer no methodo exposto no numero anterior, ou se alguma d'estas derivadas é infinita n'este ponto, ou ainda se o methodo anterior leva a calculos complicados.

Assim, por exemplo, a funcção

$$y = f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$$

dá

$$y' = \frac{2}{3}(x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

A derivada y torna-se pois infinita quando é $x = a$, e póde portanto a funcção ser maxima ou minima no ponto a.

Pondo $x = a + h$ em $f'(x)$ vem o resultado $\frac{2}{3} h^{-\frac{1}{3}}$, e portanto $f'(a+h)$ passa no ponto a de negativa para positiva. A $x = a$ corresponde pois um valor minimo b da funcção dada.

127. Se a funcção cujos maximos e minimos queremos achar, for a funcção implicita y, definida pela equação $F(x, y) = 0$, determinaremos, pela eliminação de x e y entre as equações

$$F(x, y) = 0, \quad y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0,$$

os valores de x que tornam y maxima ou minima e os valores de y correspondentes. Substituindo depois estes valores nas derivadas y'', y''', etc., vê-se, pela ordem da primeira derivada que não se annulla e pelo signal do resultado, quaes d'estes valores de y são maximos ou minimos.

Procuremos, por exemplo, as ordenadas maxima e minima da hyperbole cuja equação é

$$2x^2 - 3xy \quad 2y^2 \cdot\cdot 50 = 0.$$

Eliminando x e y entre a equação precedente e a equação

$$y' = \frac{4x + 3y}{4y - 3x} = 0,$$

ou

$$2x + y = 0,$$

vem $x = \pm 3$, $y = \mp 4$.

Derivando y' e pondo no resultado $x = 3$ e $y = -4$, vem para y'' um valor negativo, logo á abscissa $x = 3$ corresponde uma ordenada maxima $y = -4$, ou uma ordenada negativa, cujo valor absoluto é minimo e egual a 4. Os valores $x = -3$, $y = 4$ dão a y'' um valor positivo; logo á abscissa $x = -3$ corresponde uma ordenada minima $y = 4$.

128. *Funcções de duas variaveis independentes.* — Diz-se que a funcção de duas variaveis $z = f(x, y)$ é *maxima* no ponto (x_1, y_1), se o valor $f(x_1, y_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella toma nos pontos visinhos de (x_1, y_1); isto é, se existe um numero positivo δ, tal que a deseguualdade $f(x_1 + h, y_1 + k) < f(x_1, y_1)$ seja satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* no ponto (x_1, y_1), se existe um numero δ,

tal que a desegualdade $f(x_1+h, y_1+k) > f(x_1, y_1)$ seja satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e δ.

Todos os pontos (x, y) visinhos de (x_1, y_1) estão situados sobre as rectas representadas pela equação $y - y_1 = a(x - x_1)$ ou sobre a recta representada pela equação $x = x_1$. Para que a funcção z seja pois maxima no ponto (x_1, y_1), é necessario e sufficiente que a funcção de uma variavel

$$(1) \qquad f(x, y_1 + a(x - x_1)) = \varphi(x)$$

seja maxima no ponto $x = x_1$, qualquer que seja o valor de a, e que a funcção $f(x_1, y)$ seja tambem maxima no ponto $y = y_1$; e, para que z seja minima no referido ponto, é necessario e sufficiente que as funcções precedentes sejam minimas no ponto $x = x_1$ e $y = y_1$, qualquer que seja o valor de a.

Posto isto, supponhamos que $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ são funcções continuas de x e y, e procuremos os valores d'estas variaveis que tornam z maxima ou minima.

Notemos, para isso, que é condição necessaria para que a funcção (1) seja maxima ou minima no ponto $x = x_1$, quando a a se dá um valor particular qualquer, que a equação

$$\varphi'(x) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} a = 0$$

seja satisfeita pelos valores $x = x_1$ e $y = y_1$. Para que a funcção (1) seja pois maxima ou minima, qualquer que seja o valor dado a a, devem x_1 e y_1 satisfazer ás equações

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Estas equações determinam pois os valores de x e y que podem dar a z um valor maximo ou minimo.

Derivando $\varphi'(x)$ relativamente a x, attendendo á segunda das equações precedentes e representando por r, s, t os valores que tomam as derivadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ no ponto (x_1, y_1), vem o trinomio

$$\varphi''(x) = r + 2sa + ta^2,$$

que, para aos valores x_1 e y_1 de x e y poder corresponder um valor maximo ou minimo de z, deve ser nullo ou ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja o valor de a.

Sejam a_0 e a_1 as duas raizes da equação que resulta de egualar a zero o trinomio anterior, e portanto

$$\varphi''(x) = t(a - a_0)(a - a_1).$$

1.º Se as raizes a_0 e a_1 são reaes e desiguaes, $\varphi''(x)$ muda de signal quando a passa por a_0 e por a_1; logo a funcção z não póde ser n'este caso maxima nem minima no ponto considerado. Dá-se esta circumstancia quando é $rt - s^2 < 0$.

2.º Se as raizes a_0 e a_1 são imaginarias e eguaes a $p \pm iq$, temos

$$\varphi''(x) = t\left[(a - p)^2 + q^2\right],$$

e vê-se portanto que $\varphi''(x)$ tem sempre o signal de t, qualquer seja a, e que a funcção (1) é pois maxima no ponto $x = x_1$, quando t é negativo, e minima, quando t é positivo. A funcção $f(x_1, y)$ é tambem maxima no ponto $y = y_1$, quando t é negativo, e minima, quando t é positivo. Logo a funcção z é maxima no ponto (x_1, y_1) no primeiro caso e minima no segundo. Dá-se esta circumstancia quando é $rt - s^2 > 0$.

3.º Se as duas raizes a_0 e a_1 forem eguaes, isto é, se for $rt - s^2 = 0$, temos

$$\varphi''(x) = t(a - a_0)^2,$$

e vê-se portanto que $\varphi''(x)$ é nulla quando $a = a_0$ e tem o signal de t no caso contrario. Recorrendo n'este caso ás derivadas seguintes de z, ponha-se $x = x_1$, $y = y_1$ e $a = a_0$ nas expressões de $\varphi'''(x)$, $\varphi^{(4)}(x)$, etc., até encontrar uma que não seja nulla. Se esta derivada for de ordem impar, a funcção z não é maxima nem minima no ponto (x_1, y_1); se esta derivada for de ordem par e o seu signal for differente do signal de t, tambem z não é maxima nem minima no ponto considerado; finalmente se esta derivada for de ordem par e tiver o signal de t, a funcção será maxima ou minima no ponto (x_1, y_1), segundo este signal é $-$ ou $+$.

4.º Se for $t = 0$ e r differente de zero, o calculo anterior não é applicavel, mas póde-se em todo elle trocar x por y e resolver assim a questão.

5.º Se for ao mesmo tempo $t = 0$ e $r = 0$, temos a egualdade $\varphi''(x) = 2sa$; o signal de $\varphi''(x)$ muda pois com o signal de a e a funcção z não é maxima nem minima no ponto (x_1, y_1).

6.º Se for $r = 0$, $s = 0$ e $t = 0$, a derivada $\varphi''(x)$ é nulla no ponto (x_1, y_1), qualquer que seja a, e é portanto necessario recorrer á derivada $\varphi'''(x)$, que deve ser nulla, qualquer que seja a, para que n'este ponto possa z ser maxima ou minima, e depois á derivada $\varphi^{(4)}(x)$, que deve ser nulla ou ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja a, etc.

Podemos resumir a parte principal d'esta discussão na regra seguinte:

Para achar os valores maximos e minimos de z, resolvam-se relativamente a x e a y as equações $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *e substitua-se cada systema dos valores resultantes na expressão*

$$\mathrm{A} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Os systemas de valores que dão $\mathrm{A} > 0$ tornam z maximo, se o valor correspondente de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *é negativo, e minimo, se este valor é positivo.*

Os systemas de valores que dão $\Lambda = 0$ não tornam z maximo nem minimo.

Para estudar o que acontece nos pontos em que é $\Lambda = 0$, é necessario recorrer ás derivadas de z de ordem superior á segunda [1].

Exemplo 1.º Achar a mais curta distancia entre um ponto (x_0, y_0, z_0) e um plano

$$z = Ax + By + C.$$

Temos de achar os valores de x e y que tornam maxima ou minima a funcção

$$D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

z sendo dada em funcção de x e y pela equação do plano.

As equações que determinam x e y são pois

$$\frac{\partial D^2}{\partial x} = 2(x - x_0) + 2A(z - z_0) = 0, \quad \frac{\partial D^2}{\partial y} = 2(y - y_0) + 2B(z - z_0) = 0,$$

e, como estas equações são as de uma recta perpendicular ao plano, segue-se que o ponto do plano cuja distancia ao ponto dado é minima coincide com o pé da perpendicular abaixada do ponto dado sobre o plano, como já se sabia.

Tirando d'estas equações e da equação do plano os valores de x, y e z e substituindo-os na expressão de D, vem a fórmula

$$D = \frac{Ax_0 + By_0 + C - z_0}{(1 + A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}},$$

que dá o valor da minima distancia pedida.

Podemos verificar que o precedente valor de D é um minimo. Com effeito, pondo na expressão

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 D^2}{\partial x \partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} = 2(A^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} = 2(B^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 D^2}{\partial x \partial y} = 2AB,$$

vem o resultado $4(1 + A^2 + B^2)$, que é positivo, assim como $\frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2}$.

---

[1] A theoria dos maximos e minimos das funcções de duas ou mais variaveis foi estudada por Lagrange em uma Memoria publicada em 1759 no tom. I da *Miscellanea Taurinensis*.

Exemplo 2.º Para fazer uma segunda applicação do methodo anterior, procuremos a maxima e a minima distancia entre os pontos de duas curvas planas dadas, cujas equações são $F(x, y)=0$, $f(X, Y)=0$.

A distancia D entre um ponto qualquer da primeira curva e um ponto qualquer da segunda é dada pela fórmula

$$D^2=(X-x)^2+(Y-y)^2,$$

e portanto os valores de x e X que podem tornar D^2 maxima ou minima e os valores de y e Y correspondentes são dados pelas equações das curvas e pelas seguintes:

$$X-x+(Y-y)Y'=0, \quad X-x+(Y-y)y'=0,$$

as quaes mostram que as rectas que unem os pontos das duas curvas cuja distancia é maxima ou minima, são normaes a estas curvas.

Sejam (x_1, y_1), (X_1, Y_1) dois pontos assim determinados. Para completar a resolução do problema proposto, deve-se ainda verificar se as coordenadas (x_1, y_1) e (X_1, Y_1) satisfazem ou não a alguma das condições

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial X^2}\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 D^2}{\partial x\,\partial X}\right)^2 \gtreqless 0.$$

Supponhamos que é satisfeita a primeira d'estas condições. A distancia D^2 será então minima quando for

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D^2}{\partial X^2}=1+Y'^2+(Y-y)Y''>0$$

nos pontos considerados, e maxima no caso de ter logar a desegualdade contraria. Representando por (a, b) as coordenadas do centro de curvatura da curva $F(X, Y)=0$ no ponto (X, Y), podemos escrever esta desegualdade do modo seguinte (n.º 90-I):

$$(1+Y'^2)\frac{b-y}{b-Y}>0,$$

o que mostra que a distancia D^2 é minima quando b não estiver comprehendido entre y_1 e Y_1. A desegualdade contraria mostra que D^2 é maxima quando b está comprehendido entre y_1 e Y_1.

VI

Indeterminações

129. Se a funcção $f(x)$ é indeterminada quando $x=a$, chama-se *verdadeiro valor da funcção* no ponto a o limite para que tende $f(x)$, quando x tende para a. Vamos procurar este limite em alguns casos mais importantes [1].

I. Se for

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

e as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ se annullarem quando $x=a$, a funcção reduz-se a $\frac{0}{0}$ e vamos achar o seu verdadeiro valor. Por ser (n.º 64)

$$f(a+h)=\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)},$$

quando as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ são continuas no ponto a e admittem derivadas de primeira ordem finitas nos pontos visinhos de a, temos, n'este caso,

$$f(a)=\lim_{h=0} f(a+h)=\lim_{h=0}\frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)}.$$

Se for $\varphi'(a)=0$, $\psi'(a)=0$, temos do mesmo modo

$$f(a)=\lim_{h=0}\frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_1 h)}=\lim_{h=0}\frac{\varphi''(a+\theta_2 h)}{\psi''(a+\theta_2 h)}.$$

Em geral, sé forem nullas as funcções $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(a)$ e $\psi(a)$, $\psi'(a)$, ..., $\psi^{(n-1)}(a)$, teremos

$$f(a)=\lim_{h=0}\frac{\varphi^{(n)}(a+\theta_n h)}{\psi^{(n)}(a+\theta_n h)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)}.$$

Por esta fórmula calcula-se o valor de $f(a)$, quando se sabe achar o limite para que tende o seu segundo membro.

---

(1) O calculo differencial foi applicado a esta questão por João Bernoulli em um artigo publicado em 1704 nas *Acta eruditorum*, onde considerou as fracções que se apresentam debaixo da fórma $\frac{0}{0}$.

Se as funcções $\varphi^{(n)}(x)$ e $\psi^{(n)}(x)$ forem continuas no ponto a, podemos ainda escrever

$$f(a) = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}.$$

No caso de ser $a = \infty$, podemos pôr $x = \frac{1}{t}$ e depois fazer tender t para 0. Temos d'este modo

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{t=0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t=0} \frac{\frac{1}{t^2}\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}\psi'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

e a regra anterior é ainda applicavel.

Exemplo. A funcção

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \operatorname{sen} x}$$

é indeterminada, quando $x = 0$, assim como a funcção

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x}.$$

A fracção

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{-\cos x}{e^x + \operatorname{sen} x}$$

é egual a -1, quando é $x = 0$; logo -1 é o verdadeiro valor de y, correspondente a $x = 0$.

II. Seja agora $f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$ e procuremos o verdadeiro valor d'esta fracção, isto é, o limite para que tende $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, quando x tende para a.

Representando por x_0 um numero tal que x esteja comprehendido entre x_0 e a, e suppondo que as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ admittem derivadas finitas no ponto x_0 e nos pontos comprehendidos entre x_0 e a, e que $\psi'(x)$ é differente de zero n'estes pontos, temos

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} \frac{\left[1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}\right]}{\left[1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right]} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta h)\left(1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}\right)}{\psi'(x_0 + \theta h)\left(1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right)},$$

onde $h = x - x_0$.

Suppondo agora que a fracção $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ tende para um limite finito e determinado A, quando x tende para a, tambem a fracção $\frac{\varphi'(x_0+\theta h)}{\psi'(x_0+\theta h)}$ tende para o mesmo limite, quando x_0 tende para a, visto que $x_0+\theta h$ está comprehendido entre x_0 e x e portanto entre x_0 e a. Podemos pois dar a x_0 um valor tão proximo de a que esta fracção deffira tão pouco quanto se queira de A.

Depois de escolher d'este modo x_0, por ser

$$\lim_{x=a} \frac{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} = 1,$$

podemos dar a ε um valor tão pequeno que, para os valores de x comprehendidos entre $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$, a fracção que entra no primeiro membro d'esta egualdade deffira da unidade tão pouco quanto se queira.

Podemos pois dar a x_0 um valor tão proximo de a e a ε um valor tão pequeno que, para todos os valores de x comprehendidos entre $a-\varepsilon$ e $a+\varepsilon$, a fracção $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ diffira tão pouco quanto se queira de A; e temos portanto ([1])

$$f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

e, se $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ são continuas no ponto a,

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Logo acha-se o verdadeiro valor da fracção considerada pela mesma regra que no caso anterior.

Se for $A=\infty$, teremos

$$\lim_{x=a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} = 0,$$

e portanto $\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$. A regra é pois ainda applicavel.

([1]) A demonstração precedente é tirada do *Calcolo differentiale* de Genocchi e Peano (Turin, 1884).

Exemplo. A funcção

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\log x}{x^{-n}}$$

dá $\frac{\infty}{\infty}$, quando $x = 0$. Mas o quociente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{x^{-1}}{-nx^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n}$$

é nullo, quando $x = 0$; logo é tambem nulla a funcção considerada.

III. Se a funcção $f(x) = \varphi(x) . \psi(x)$ se reduzir a $0 \times \infty$, quando $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á fracção $\frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^{-1}}$, que se reduz a $\frac{0}{0}$, ou á fracção $\frac{\psi(x)}{[\varphi(x)]^{-1}}$, que se reduz a $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo. A funcção

$$y = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

dá $0 \times \infty$, quando $n = \infty$. Para achar o seu verdadeiro valor, consideremos a fracção

$$y = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{n^{-1}},$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$ e que dá, derivando o numerador e o denominador relativamente a n, a fracção

$$\frac{-n^{-2} x^{\frac{1}{n}} \log x}{-n^{-2}},$$

que se reduz a $\log x$, quando $n = \infty$. Logo temos a fórmula notavel

$$\log x = \lim_{n=\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

IV. Se a funcção $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ se reduzir a $\infty - \infty$, quando $x = a$, acha-se o seu

verdadeiro valor, applicando a regra anterior á fracção

$$\frac{\dfrac{1}{\psi(x)} - \dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}},$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$.

V. Se a funcção $y = \varphi(x)^{\psi(x)}$ se reduzir a 0^0, 1^∞, ∞^0, quando $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valor applicando a regra anterior á funcção

$$\log y = \psi(x) \log \varphi(x),$$

que se reduz a $0 \times \infty$.

Exemplo. A funcção

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

quando $n = \infty$, dá 1^∞. Para achar o seu verdadeiro valor, determinemos o verdadeiro valor da funcção

$$\log y = n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{\log\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)}{n^{-1}},$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$; o que dá $\log y = x$, e portanto $y = e^x$. Temos pois a fórmula seguinte, dada por João Bernoulli:

$$e^x = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

CAPITULO VI

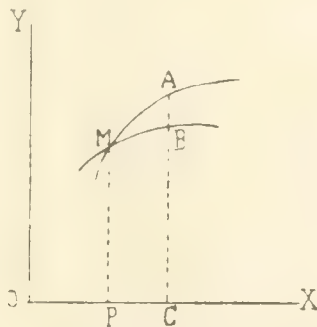
Applicações geometricas da fórmula de Taylor

I

Curvas planas

130. *Contacto das curvas planas.* — Sejam

$$y = f(x), \quad Y = F(X)$$

as equações de duas curvas que passam por um ponto M, cujas coordenadas são x_0 e y_0, e sejam A e B dois pontos das mesmas curvas, correspondentes á abscissa $x_0 + h$. Se o

segmento AB, egual á differença $F(x_0+h) - f(x_0+h)$ das ordenadas AC e BC d'estes pontos, for infinitamente pequeno de ordem $n+1$ relativamente a PC, diz-se que as curvas têem no ponto (x_0, y_0) um *contacto de ordem n.*

Se pelo ponto (x_0, y_0) passar uma terceira curva $y = \varphi(x)$, que tenha com a curva $y = f(x)$ um contacto de ordem *m*, e se for $n > m$, a segunda das curvas consideradas approxima-se mais da curva $y = f(x)$, na visinhança do ponto (x_0, y_0), do que a terceira curva $y = \varphi(x)$. Com effeito, representando respectivamente por β e α as differenças $F(x_0+h) - f(x_0+h)$ e

*

$\varphi(x_0+h)-f(x_0+h)$, é, por definição,

$$\beta=h^{n+1}(A+\varepsilon),\quad \alpha=h^{m+1}(B+\varepsilon'),$$

onde A e B representam quantidades finitas differentes de zero, e ε e ε' quantidades infinitamente pequenas com h; portanto temos a egualdade

$$\alpha-\beta=h^{m+1}[B+\varepsilon'-h^{n-m}(A+\varepsilon)],$$

a qual faz vêr que se póde dar a h_1 um valor tão pequeno que $\alpha-\beta$ tenha o signal de $h^{m+1}(B+\varepsilon')$, isto é, o signal de α, quando $|h|<h_1$. Será pois, para todos os valores de h comprehendidos entre $-h_1$ e $+h_1$, $\beta<\alpha$.

131. As condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n, decorrem immediatamente da fórmula de Taylor, que dá

$$\begin{aligned}F(x_0+h)-f(x_0+h)&=F(x_0)-f(x_0)\\&+h[F'(x_0)-f'(x_0)]+\ldots+\frac{h^n}{n!}[F^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)]\\&+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[F^{(n+1)}(x_0+\theta h)-f^{(n+1)}(x_0+\theta h)].\end{aligned}$$

Com effeito, se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ admittirem derivadas até á ordem $n+1$, continuas no ponto x_0, para que a differença $F(x_0+h)-f(x_0+h)$ seja infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h, é necessario e sufficiente que as differenças

$$F(x_0)-f(x_0),\ F'(x_0)-f'(x_0),\ \ldots,\ F^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)$$

sejam nullas, e que a differença $F^{(n+1)}(x_0)-f^{(n+1)}(x_0)$ seja differente de zero, o que dá o seguinte:

Theorema. — *Se as funcções* $F(x)$ *e* $f(x)$ *admittirem derivadas até á ordem* $n+1$, *continuas no ponto* x_0, *são condições necessarias e sufficientes para que as curvas consideradas tenham no ponto* (x_0, y_0) *um contacto de ordem* n, *que* x_0 *satisfaça ás equações*

$$F(x)=f(x),\quad F'(x)=f'(x),\ \ldots,\ F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x), \tag{1}$$

e que $F^{(n+1)}(x_0)$ *seja differente de* $f^{(n+1)}(x_0)$.

I. Resulta ainda d'estas egualdades e da precedente que a differença $F(x_0+h)-f(x_0+h)$

tem o mesmo signal, na visinhança do ponto (x_0, y_0), qualquer que seja o signal de h, quando n é impar, e que muda n'este ponto de signal com h, quando n é par. Logo, quando duas curvas têem um contacto de ordem par no ponto (x_0, y_0), cruzam-se n'este ponto, e, quando têem um contacto de ordem impar, tocam-se, sem se cruzar.

II. Se, tomando para variavel independente uma quantidade t, as curvas forem representadas pelas equações $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $Y = \pi(t)$, as equações de condição a que deve satisfazer o valor que tem t no ponto (x_0, y_0), para que as curvas tenham n'este ponto um contacto de ordem n, são, representando por x', y', Y', x'', ... as derivadas de x, y e Y relativamente a t,

$$y = Y, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{Y'}{x'}, \quad \frac{y''x' - x''y'}{x'^3} = \frac{Y''x' - x''Y'}{x'^3}, \quad \ldots,$$

e portanto

$$y = Y, \quad y' = Y', \quad y'' = Y'', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = Y^{(n)}.$$

Como corollario d'estas egualdades resulta que *a ordem do contacto de duas curvas é independente dos eixos das coordenadas a que estão referidas.* Representando, com effeito, por x_1 e y_1 as novas coordenadas e por $y_1 = f_1(x_1)$ e $y_1 = F_1(x_1)$ as novas equações das curvas, as equações precedentes dão, pondo $t = x_1$,

$$F_1(x_1) = f_1(x_1), \quad F_1'(x_1) = f_1'(x_1), \quad \ldots, \quad F_1^{(n)}(x_1) = f_1^{(n)}(x_1).$$

132. Seja $y = f(x)$ a equação de uma curva dada e $Y = F(x)$ uma equação com $n+1$ parametros arbitrarios, que representa uma familia de curvas. A curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada no ponto (x_0, y_0) diz-se *osculadora* da curva $y = f(x)$ n'este ponto. Para obter esta curva, deve-se dispôr dos $n+1$ parametros de modo que sejam satisfeitas as $n+1$ equações de condição (1), e a ordem do seu contacto com a proposta será egual ou superior a n, segundo a differença entre $f^{(n+1)}(x_0)$ e $F^{(n+1)}(x_0)$ for differente de zero ou egual a zero.

133. A doutrina precedente, devida a Lagrange, vae-nos apresentar, debaixo de um novo ponto de vista, alguns dos resultados obtidos no Capitulo III.

I. Se quizermos achar a *recta osculadora* da curva $y = f(x)$ no ponto (x, y), temos de determinar as constantes A e B, que entram na equação

$$Y = AX + B$$

da recta, de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de primeira ordem

$$y = Ax + B, \quad y' = A.$$

A equação da recta pedida é pois

$$Y - y = y'(X - x),$$

e portanto esta recta coincide com a tangente á curva dada.

Por ser $Y'' = Y''' = \ldots = 0$, a tangente tem com a curva proposta um contacto de segunda ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x) = 0$, $f'''(x) \lessgtr 0$; um contacto de terceira ordem nos pontos que satisfazem ás condições $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$, $f^{(4)}(x) \lessgtr 0$; etc.

II. Se quizermos achar o *circulo osculador* da curva $y = f(x)$ no ponto (x, y), temos de determinar as constantes arbitrarias a, b e R, que entram na equação

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de segunda ordem

$$y = Y, \quad y' = Y', \quad y'' = Y'',$$

y', y'', Y' e Y'' representando as derivadas de primeira e segunda ordem de y e Y relativamente a x. As duas ultimas quantidades são dadas pelas equações

$$(x - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2,$$

$$x - a + (Y - b)Y' = 0,$$

$$1 + Y'^2 + (Y - b)Y'' = 0;$$

e porisso as condições consideradas reduzem-se ás seguintes:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

$$x - a + (y - b)y' = 0,$$

$$1 + y'^2 + (y - b)y'' = 0.$$

D'estas equações tiram-se os valores das coordenadas a e b do centro e o valor do raio R do circulo osculador

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \quad a = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Da comparação d'estas fórmulas com as que dão as coordenadas do centro e o raio do circulo de curvatura (n.º 90-I) conclue-se que *o circulo de curvatura e o circulo osculador, correspondentes ao mesmo ponto de uma curva dada, coincidem* ([1]).

Esta coincidencia podia ser prevista. Com effeito, das equações $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$ e das fórmulas (3) e (6) do n.º 90 conclue-se que os circulos de curvatura da curva dada e do seu circulo osculador no ponto (x, y) coincidem.

Nota. Como na equação geral do circulo entram sómente tres constantes arbitrarias, o contacto do circulo osculador com uma curva é, em geral, de segunda ordem. Este contacto é de ordem superior á segunda sómente nos pontos que satisfazem á condição seguinte, que resulta de $y''' = Y'''$:

$$3y'y'' + (y - b)y''' = 0,$$

ou, eliminando $y - b$ por meio da ultima das equações precedentes,

$$3y''^2 y' - (1 + y'^2) y''' = 0.$$

134. *Pontos de inflexão.* — A determinação dos *pontos de inflexão* da curva $y = f(x)$ é facil de conseguir por meio do theorema do n.º 88-I. Com effeito, se $f''(x)$ é uma funcção continua no ponto x_0, da egualdade

$$f''(x_0 + h) = f''(x_0) + \varepsilon_1,$$

onde ε_1 representa uma quantidade infinitamente pequena com h, resulta que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto x_0, é necessario que seja $f''(x_0) = 0$. N'este caso, suppondo a funcção $f'''(x)$ finita no ponto x_0, a egualdade (n.º 55)

$$f''(x_0 + h) = h[f'''(x_0) + \varepsilon_2],$$

onde ε_2 representa uma quantidade infinitamente pequena com h, mostra que $f''(x_0 + h)$ muda de signal com h, e portanto que (x_0, y_0) é um ponto de inflexão, se $f'''(x_0)$ é differente de zero.

No caso de ser $f'''(x_0) = 0$ e de a funcção $f^{(4)}(x)$ ser finita no ponto x_0, a egualdade (n.ºs 55 e 64)

$$f''(x_0 + h) = hf'''(x_0) + \tfrac{1}{2}h^2[f^{(4)}(x_0) + \varepsilon_3]$$

([1]) Lagrange deu a theoria geral dos contactos na sua notavel *Théorie des fonctions analytiques*, publicada em 1797. Antecedentemente tinha sido considerado por Newton e Leibnitz o circulo osculador, a proposito da theoria da curvatura das curvas planas. (Vej. a nota ao n.º 90).

mostra que, para $f'''(x)$ mudar de signal no ponto (x_0, y_0), é necessario que seja $f^{iv}(x_0) = 0$. Logo, se esta egualdade não é satisfeita, (x_0, y_0) não é ponto de inflexão.

Continuando do mesmo modo, obtem-se a regra seguinte:

Para achar os pontos de inflexão de uma curva, cuja equação é dada, determinem-se x e y por meio da equação da curva e da equação $y'' = 0$.

Substitua-se depois cada grupo (x_0, y_0) de valores resultantes nas derivadas seguintes de y. Se a primeira derivada que não se annulla for de ordem impar, o ponto (x_0, y_0) é de inflexão, se for de ordem par, este ponto não é de inflexão.

Se as coordenadas (x_0, y_0) satisfazem á condição $y'' = 0$ e o ponto correspondente não é de inflexão, diz-se que é um *ponto de ondulação.*

Tanto nos pontos de inflexão como nos de ondulação, a tangente tem com a curva um contacto de ordem superior á primeira (n.º 133). Se a ultima derivada que é nulla n'este ponto é da ordem n, este contacto é tambem de ordem n.

Exemplos. — 1.º Consideremos a curva cuja equação é

$$y = A \operatorname{sen}(ax + b) + B.$$

Teremos

$$y' = Aa \cos(ax + b), \quad y'' = -aA^2 \operatorname{sen}(ax + b);$$

e como os valores de x que annullam y'' são dados pela relação $ax + b = k\pi$, onde k representa um inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo, e como estes valores de x não annullam a terceira derivada

$$y''' = -Aa^3 \cos(ax + b),$$

$\left(\frac{-b + k\pi}{a}, B\right)$ são as cordenadas dos pontos de inflexão da curva considerada.

2.º A equação $y = x + (x - 1)^7$ dá

$$y' = 1 + 7(x - 1)^6, \quad y'' = 7.6(x - 1)^5, \quad \ldots, \quad y^{(7)} = 7!$$

Como o valor $x = 1$ annulla a derivada y'', e como a primeira das derivadas seguintes que este valor de x não annulla é de ordem impar, o ponto (1, 1) é de inflexão.

I. Se a curva dada for representada pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, t representando a variavel independente, os pontos de inflexão são dados (n.º 84) pela equação

$$x' y'' - y' x'' = 0,$$

x', x'', y', y'' representando as derivadas de x e y relativamente a t.

Pondo $t=\theta$, $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, vem a equação seguinte:

$$\rho^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=0,$$

por meio da qual se determinam os pontos de inflexão e de ondulação, quando a curva dada é representada por uma equação $\rho=\mathrm{F}(\theta)$, referida a coordenadas polares

II. Seja $\mathrm{F}(x,\,y)=0$ a equação de uma curva algebrica do grau m. Por ser

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}y'=0,\quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{dy^2}y'^2+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}y''=0,$$

os seus pontos de inflexão são dados pela equação

$$\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}=0,$$

a qual póde ainda ser escripta do modo seguinte

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} & \frac{d^2 y}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y\,\partial x}, & \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Posto isto, escreva-se a equação da curva considerada debaixo da fórma homogenea

$$\mathrm{F}(x,\,y,\,z)=0,\quad z=1$$

como no n.º 86-V. Teremos (n.º 70)

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}x+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}y+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}z=m\,\mathrm{F}(x,\,y,\,z)=0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}x+\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\,\partial y}y+\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\,\partial z}z=(m-1)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y\,\partial x}x+\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2}y+\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y\,\partial z}z=(m-1)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z\,\partial x}x+\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z\,\partial y}y+\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z^2}z=(m-1)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}.$$

Multiplicando agora respectivamente por x, y e $m-1$ as columnas do determinante anterior e subtrahindo depois de cada termo da ultima columna os termos do determinante que estão na mesma linha, vem, attendendo ás equações precedentes,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicando ainda por x, y e $m-1$ as linhas d'este determinante e subtrahindo depois de cada termo da ultima linha os termos do determinante que estão na mesma columna, vem finalmente a equação

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0,$$

á qual devem satisfazer as coordenadas dos pontos de inflexão da curva proposta.

Por serem as derivadas que entram n'esta equação funcções inteiras de x, y e z do grau $m-2$, vê-se que a equação é do grau $3(m-2)$. Logo a curva representada por esta equação não póde cortar a curva proposta em mais de $3m(m-2)$ pontos e esta *curva não póde ter portanto mais de* $3m(m-2)$ *pontos de inflexão.* O theorema notavel que vimos de demonstrar é devido a O. Hesse, e porisso se dá a esta curva o nome de *hesseana* da curva dada.

135. No processo anterior para achar os pontos de inflexão, parte-se da hypothese que a derivada y'' é continua. Logo póde ainda haver outros pontos de inflexão em que esta derivada não exista ou seja discontinua. Além d'isso, se y'' é continua no ponto (x_0, y_0), mas alguma das derivadas y''', $y^{(4)}$, etc., a que é necessario recorrer, não existe ou é infinita n'este ponto, não se póde distinguir pelo processo anterior se o ponto (x_0, y_0) é ou não de inflexão. N'estes casos, para achar os pontos de inflexão, recorre-se principalmente ao theorema do n.º 88, por meio do qual se vê em que sentido está voltada a concavidade na visinhança do ponto considerado.

Exemplo 1.º A equação $y = b + (x-a)^{\frac{5}{3}}$ dá

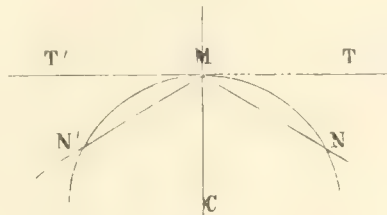
$$y' = \frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}, \quad y'' = \frac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Como $x=a$ torna y'' infinita, vamos ver se o ponto (a, b) é ou não de inflexão. Para isso, notemos que y'' é positiva quando $x>a$, e que é negativa quando $x<a$; logo, á direita do ponto (a, b) está a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, e á esquerda d'este ponto está a concavidade voltada no sentido contrario, e o ponto é de inflexão (n.º 88).

Exemplo 2.º A equação $y=b+(x-a)^{\frac{7}{3}}$ dá

$$y''=\frac{28}{9}(x-a)^{\frac{1}{3}}, \quad y'''=\frac{28}{27}(x-a)^{-\frac{2}{3}}.$$

No ponto (a, b) annulla-se y'', mas y''' torna-se infinita, e o methodo anterior não é applicavel. Raciocinando porém como no exemplo anterior, conclue-se que o ponto é de inflexão.

136. *Pontos singulares das curvas planas.* — Chama-se *ponto ordinario* de uma curva plana o ponto M onde se reunem dois arcos de curva, cujas secantes MN e MN′ tendem para direcções oppostas da mesma tangente TT′, quando N e N′ tendem para M *(fig. 1)*.

(Fig. 1)

Os pontos que não estão n'estas condições chamam-se *singulares*. Mencionaremos os pontos seguintes:

1.º O *ponto de suspensão*, que é aquelle d'onde parte só um arco de curva.

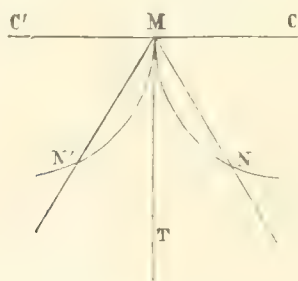
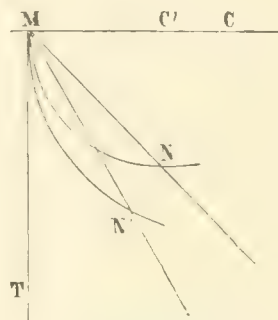
2.º O *ponto anguloso*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas tangentes são differentes.

3.º O *ponto isolado*, que é aquelle que está completamente separado do resto da curva.

4.º O *ponto de reversão de primeira especie*, que é aquelle d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes MN e MN′ tendem para a mesma direcção MT da tangente, ficando uma de cada lado da tangente *(fig. 2)*.

5.º O *ponto de reversão de segunda especie*, isto é, o ponto d'onde partem dois arcos de curva cujas secantes tendem para a mesma direcção da tangente, ficando ambas do mesmo lado da tangente *(fig. 3)*.

6.º O *nodo*, isto é, o ponto em que se cruzam dois ou mais arcos de curva.

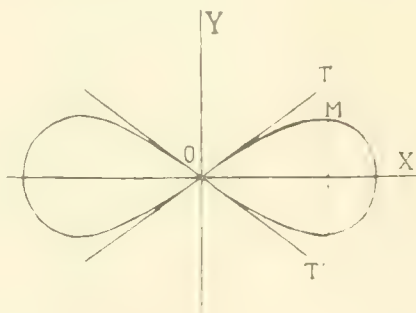
Vejamos alguns exemplos de curvas em que se encontram os pontos singulares que vimos de mencionar.

(Fig. 2) (Fig. 3)

1.º Consideremos primeiramente a curva definida pela equação

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0,$$

a qual dá

$$y = \pm x\sqrt{1-x^2}, \quad y' = \pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'' = \pm\frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vê-se por meio d'estas egualdades que a curva tem a fórma indicada na figura juncta.

É symetrica relativamente aos eixos das coordenadas; tem um nodo em O, e as tangentes n'este ponto formam angulos de 45º com os eixos das coordenadas; tem quatro pontos onde o valor absoluto das ordenadas é maximo, correspondentes ás abscissas $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; e tem quatro pontos, correspondentes ás abscissas $x = 1$ e $x = -1$, onde a tangente é perpendicular ao eixo. Cada um dos arcos que se cruzam em O tem n'este ponto uma inflexão, e a curva não tem mais pontos de inflexão reaes.

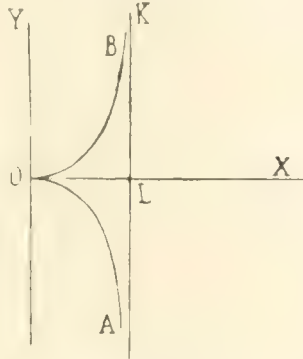
2.º Consideremos em segundo logar a curva representada pela equação

$$(a - x)y^2 = x^3,$$

á qual se dá o nome de *cissoide* de Diocles, por ter sido considerada na antiguidade por este geometra, e seja $a > 0$.

Temos

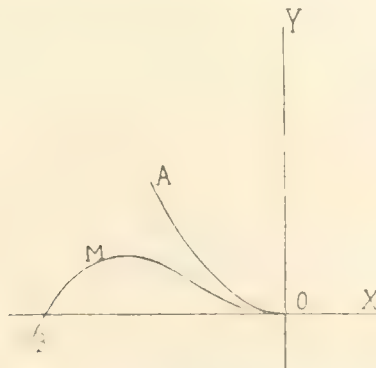
$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}, \quad y' = \pm\frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2\sqrt{(a-x)^3}},$$

e, por meio d'estas equações, vê-se que a curva tem a fórma indicada na figura junta. É

symetrica relativamente ao eixo das abscissas, ao qual é tangente no ponto O, e, como y é imaginario quando x é negativo, vê-se que tem em O um ponto de reversão de primeira especie; as suas ordenadas augmentam, quando x augmenta, e tendem para o infinito, quando x tende para a, sendo porisso a recta LK, cuja equação é $x = a$, asymptota da curva. Quando é $x > a$, y é imaginario.

.º No caso de ser dada a equação

$$y^2 - 2x^2 y + x^4 + x^5 = 0,$$

temos as egualdades

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{-x}, \quad y' = 2x \pm \frac{5}{2}x\sqrt{-x}, \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{-x},$$

por meio das quaes se vê que a curva tem a fórma indicada na figura juncta. A cada valor

que se dá a x correspondem dois valores reaes para y e y', quando $x < 0$, dois valores imaginarios, quando $x > 0$, e dois valores eguaes a zero, quando $x = 0$; logo a curva tem dois ramos, que se encontram no ponto O, onde são tangentes ao eixo das abscissas. Na visinhança d'este ponto têem estes ramos a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, visto ser positiva a quantidade y'', quando $x = 0$; e porisso a curva tem em O um ponto de reversão de segunda especie. O ramo inferior tem um ponto onde a ordenada é maxima, o qual corresponde ao valor $x = -\frac{16}{25}$ da abscissa, um ponto de inflexão, que corresponde a $x = -\frac{64}{225}$, e corta o eixo das abscissas no ponto onde $x = -1$.

4.° No caso de ser dada a equação

$$y^2 - x^3 + x^2 = 0,$$

temos

$$y = \pm x\sqrt{x-1}, \quad y' = \pm \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}},$$

e portanto a curva tem um ponto real na origem das coordenadas, e é imaginaria na visinhança d'este ponto, que é porisso um *ponto isolado*, onde se cortam duas tangentes imaginarias conjugadas. Os outros pontos reaes da curva correspondem aos valores de x desde 1 até ∞. Estes pontos formam um ramo, symetrico relativamente ao eixo das abscissas, que, partindo do ponto (1, 0), onde corta perpendicularmente este eixo, se estende até ao infinito, affastando-se constantemente dos dois eixos das coordenadas.

5.° Consideremos agora a curva transcendente representada pela equação

$$y\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right) = x.$$

Quando x tende para 0, y tende para 0, $\frac{y}{x}$ tende para 1, se $x < 0$, e tende para 0, se $x > 0$. Logo a curva tem na origem das coordenadas um *ponto anguloso*, e uma das tangentes coincide com o eixo das abscissas e a outra fórma um angulo de 45° com este eixo.

6.° Consideremos finalmente a curva representada pela equação

$$y = x \log x.$$

Como y é real, quando $x > 0$, é imaginario, quando $x < 0$, e tende para 0 (n.° 129-II), quando x tende para 0, vê-se que esta curva tem um *ponto de suspensão* na origem das coordenadas [1].

---

[1] Podem vêr-se muitos exemplos de determinações de pontos singulares e diversos modos de os obter no nosso *Tratado de las curvas especiales notables*, já mencionado no n.° 91.

I. Supponhamos que $F(x, y) = 0$ é a equação da curva dada e que a funcção $F(x, y)$ tem um unico valor correspondente a cada grupo dos valores de x e y. Estão n'este caso as curvas algebricas e tambem muitas curvas transcendentes.

A indagação dos pontos singulares d'estas curvas baseia-se no theorema seguinte, que é uma simples traducção geometrica do theorema 1.º do n.º 76:

Se a funcção $F(x, y)$ *e as derivadas* $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ *forem continuas, os pontos singulares da curva dada satisfazem ás equações*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Em virtude d'este theorema, para achar os pontos singulares da curva plana dada, devem procurar-se os valores de x e y que satisfazem á equação da curva e tornam as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ descontinuas ou nullas.

Seja (x_0, y_0) um systema d'estes valores. Para conhecer a especie do ponto singular (x_0, y_0), procure-se quantos valores reaes tem y na visinhança do ponto considerado, para saber quantos arcos de curva se encontram n'este ponto, e depois, para cada arco, o valor que n'este ponto tem y', para ver se os arcos que se encontram no ponto (x_0, y_0) têem ou não a mesma tangente, e o signal que tem y''_0, para saber a direcção para onde está voltada a concavidade do arco (n.º 88). Estas questões resolvem-se facilmente quando a equação da curva póde ser resolvida relativamente a y ou a x, como se viu nos exemplos precedentes.

II. Se a equação $F(x, y) = 0$ não poder ser resolvida relativamente a y ou a x, póde-se determinar a fórma da curva na visinhança dos pontos singulares por um methodo, devido a Newton, que vamos expôr succintamente.

Tome-se o ponto singular considerado para origem das coordenadas e seja $F_1(x, y) = 0$ a equação da curva, referida á nova origem.

Pondo n'esta equação $y = zx^a$, a representando uma constante positiva e z uma nova variavel dependente, teremos a egualdade $F_1(x, zx^a) = 0$. Determinando depois a de modo que em dois termos d'esta equação, pelo menos, tenha x o mesmo expoente e que este expoente seja menor do que o que tem x nos outros termos (o que se póde fazer por tentativas [1]), egualando os expoentes de x dois a dois e regeitando os valores de a que forem negativos ou levarem a resultados que não satisfaçam á condição precedente) e, substituindo este valor de a na equação $F_1(x, zx^a) = 0$, virá, para determinar z, uma equação da fórma $F_2(x, z) = 0$.

Sejam $z_1, z_2, \ldots$ as raizes reaes da equação $F_2(0, z) = 0$, e supponhamos que $\frac{\partial F_2(x, z)}{\partial z}$

(1) Newton indicou, debaixo de fórma geometrica, um methodo regular para resolver esta questão, ao qual Minding deu fórma algebrica em um trabalho publicado no tom. XXII do *Jornal de Crelle*.

é differente de zero nos pontos $(x=0,\ z=z_1,\ z_2,\ \ldots)$, unico caso que aqui será estudado. N'este caso z é (n.º 76) uma funcção real de x, na visinhança de cada um d'estes pontos, que admitte derivadas finitas de todas as ordens; póde portanto, na visinhança do ponto $(x=0,\ z=z_i)$, ser desenvolvida pela fórmula de Maclaurin, o que dá

$$z=z_i+z_i'x+\frac{1}{2}z_i''x^2+\ldots,$$

representando por z_i', z_i'', ... os valores que tomam z', z'', ... no ponto $(x=0,\ z=z_i)$.

Temos depois

$$y=x^a\left(z_i+z_i'x+\frac{1}{2}z_i''x^2+\ldots\right).$$

Derivando duas vezes esta equação relativamente a x, obtêem-se duas equações, por meio das quaes se determinam o valor de y' no ponto $(x=0,\ y=0)$ e o signal de y'' na visinhança d'este ponto, e portanto a tangente n'este ponto ao ramo da curva, correspondente á raiz z_i considerada, e a direcção para onde este ramo volta a concavidade na sua visinhança.

Considerando todos os ramos da curva, correspondentes aos numeros z_1, z_2, ..., conhece-se a fórma da curva na visinhança do ponto singular considerado [1].

Exemplo. A curva representada pela equação

$$y^2-x^2+x^3-y^3+y^4=0$$

tem na origem das coordenadas um ponto singular. Para determinar a fórma da curva na visinhança d'este ponto, ponha-se $y=zx^a$, o que dá

$$z^2x^{2a}-x^2+x^3-z^3x^{3a}+z^4x^{4a}=0;$$

portanto temos primeiramente, para determinar a, a equação $2a=2$, que dá $a=1$, e depois, para determinar z, a equação

$$z^2-1+(1-z^3)x+z^4x^2=0.$$

Pondo $x=0$ n'esta equação e suas derivadas, vem

$$z=1,\quad z'=0,\quad z''=-1,\ \ldots$$

$$z=-1,\quad z'-1,\quad z''=-1,\ \ldots$$

[1] O problema que tem por objecto a indagação dos pontos singulares das curvas planas foi estudado por L'Hopital, De Gua, Euler, etc. Cramer occupou-se d'elle com largueza na sua *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, onde se póde estudar desenvolvidamente o methodo que vem de ser indicado.

Na visinhança do ponto $(x=0,\ y=0)$ temos pois

$$y = x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots\right), \quad y = x\left(-1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots\right),$$

o que mostra que no ponto considerado se cortam dois ramos da curva, cujas tangentes fazem angulos de 45° com o eixo das abscissas, e que o primeiro d'estes ramos tem n'este ponto uma inflexão.

137. *Pontos multiplos.* — Consideremos ainda a curva cuja equação é $F(x, y) = 0$ e o ponto (x_0, y_0) d'esta curva, e supponhamos que a funcção $F(x, y)$ admitte derivadas parciaes de primeira ordem relativamente a x e a y, continuas no ponto (x_0, y_0). Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0), este ponto diz-se *simples*.

Supponhamos agora que $F(x, y)$ admitte as derivadas $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, continuas no ponto (x_0, y_0). Se uma d'estas derivadas, pelo menos, não é nulla no ponto (x_0, y_0) e as derivadas de primeira ordem $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ são nullas n'este ponto, diz-se que o ponto (x_0, y_0) é *duplo*.

Em geral, supponhamos que as derivadas parciaes da funcção $F(x, y)$ até á ordem n são todas continuas no ponto (x_0, y_0). Se uma, pelo menos, das derivadas de ordem n não é nulla no ponto (x_0, y_0) e se as derivadas de ordem inferior a n são todas nullas n'este ponto, diz-se que (x_0, y_0) é um ponto *multiplo*, cujo grau de multiplicidade é n.

Supponhamos que a equação proposta é algebrica e do grau m, e que $f(x, y) = 0$ é outra equação algebrica do grau m', cujos coefficientes são constantes arbitrarias, excepto um, que é determinado pela condição de a curva passar pelo ponto (x_0, y_0). Supponhamos tambem que se excluem dos valores dados a estas constantes aquelles que annullam $f_y(x_0, y_0)$. A equação $f(x, y) = 0$ determina y como funcção de x, na visinhança do ponto x_0, e esta funcção admitte derivadas de todas as ordens (n.° 76–1.°). Temos pois, pondo $x - x_0 = h$, representando por $\varphi(x)$ esta funcção e attendendo á egualdade $F(x_0, y_0) = 0$,

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = F[x_0 + h,\ \varphi(x_0 + h)] = \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0}\varphi'(x_0)\right] h \\ \quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}\varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}\varphi'^2(x_0) + \frac{\partial F}{\partial y_0}\varphi''(x_0)\right] h^2 + \ldots \end{cases}$$

Esta equação leva á determinação dos pontos em que se cortam as duas curvas consideradas na visinhança de (x_0, y_0), visto que determina h e depois as equações $x = x_0 + h$ e $y = \varphi(x)$ determinam as coordenadas d'estes pontos. Um d'elles é o ponto (x_0, y_0).

Se (x_0, y_0) é um ponto simples da curva, uma das quantidades $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ é differente de zero, e portanto a equação anterior tem, em geral, uma unica raiz egual a zero. Logo, em

virtude de um theorema bem conhecido da theoria da eliminação algebrica, as curvas cortam-se, *em geral,* em $mm' - 1$ pontos, reaes ou imaginarios, differentes do ponto (x_0, y_0), e não podem cortar-se em maior numero de pontos.

Se (x_0, y_0) é um ponto duplo da curva, as quantidades $\frac{\partial F}{\partial x_0}$ e $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ são nullas, e a equação precedente tem, em geral, duas raizes eguaes a zero. Logo as curvas consideradas cortam-se, *em geral,* em $mm' - 2$ pontos, reaes ou imaginarios, differentes do ponto (x_0, y_0), e não podem cortar-se em maior numero de pontos.

Continuando do mesmo modo, vê-se que, se (x_0, y_0) é um ponto multiplo, cujo grau de multiplicidade é n, as curvas consideradas cortam-se, *em geral,* em $mm' - n$ pontos, differentes do ponto (x_0, y_0), e não podem cortar-se em maior numero de pontos.

Vê-se pois que, nas questões em que se procura o numero de pontos em que a curva cuja equação é $f(x, y) = 0$ corta a curva cuja equação é $F(x, y) = 0$, cada ponto duplo equivale a dois pontos simples, cada ponto triplo equivale a tres pontos simples, etc. Estas considerações têem uma importancia consideravel no *Calculo integral.*

A doutrina que precede tem ainda logar quando o ponto (x_0, y_0) é imaginario. Veremos, com effeito, n'outro logar que o theorema 1.º do n.º 76, que lhe serve de base, tem logar no caso das variaveis imaginarias.

I. É conveniente ainda observar que, no caso de (x_0, y_0) ser um ponto simples e $\varphi(x)$ satisfazer á condição

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0) = 0,$$

a equação (1) dá para h dois valores eguaes a 0, e mostra portanto que n'este ponto estão reunidos dois pontos de intersecção das curvas consideradas. É facil de ver que esta equação coincide com a que exprime que as curvas têem um contacto de primeira ordem no ponto (y_0, y_0).

Se, além d'esta equação, tiver logar a seguinte

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \varphi'^2(x_0) + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi''(x_0) = 0,$$

no ponto (x_0, y_0) estão reunidos tres pontos de intersecção das curvas. É facil tambem vêr que esta equação coincide com a que exprime que as curvas consideradas têem um contacto de segunda ordem no ponto (x_0, y_0).

Continuando do mesmo modo, vê-se que, *se as curvas tiverem no ponto* (x_0, y_0) *um contacto de ordem* p, *n'este ponto estão reunidos* $p + 1$ *pontos de intersecção das curvas.*

Supponhamos agora que (x_0, y_0) é um ponto duplo. N'este caso, se for

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \varphi'(x_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \varphi'^2(x_0) = 0,$$

a equação (1) dá para h tres valores eguaes a 0; portanto n'este ponto estão reunidos tres pontos de intersecção das curvas consideradas.

Continuando do mesmo modo, acham-se as condições para que no ponto duplo (x_0, y_0) estejam reunidos quatro, cinco, etc. pontos de intersecção das curvas.

Estas considerações podem ser facilmente estendidas aos pontos triplos, quadruplos, etc.

II. Appliquemos as considerações precedentes ao caso de se cortar a curva $F(x, y) = 0$ pela recta $y - y_0 = A(x - x_0)$.

Se (x_0, y_0) é um ponto simples e a recta tem com a curva n'este ponto um contacto de ordem p, no ponto (x_0, y_0) estão reunidos $p + 1$ pontos de intersecção da recta com a curva.

Se (x_0, y_0) é um ponto duplo e tem logar a condição

$$\frac{d^2F}{dx_0^2} + 2\frac{d^2F}{dx_0\,dy_0}A + \frac{d^2F}{dy_0^2}A^2 = 0,$$

no ponto (x_0, y_0) estão reunidos tres pontos de intersecção da recta com a curva. Esta equação dá dois valores para A, aos quaes correspondem duas rectas que satisfazem á condição precedente e que são determinadas pela equação

$$\frac{d^2F}{dx_0^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{d^2F}{dx_0\,dy_0}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{d^2F}{dy_0^2}(y - y_0)^2 = 0,$$

que resulta de eliminar A entre a ultima equação e a equação $y - y_0 = A(x - x_0)$. A estas rectas, cujos coefficientes angulares coincidem com os valores que se obtêem para y' derivando duas vezes a equação $F(x, y) = 0$ relativamente a x e pondo no resultado $x = x_0$ e $y = y_0$, dá-se o nome de tangentes á curva no ponto duplo considerado. Estas tangentes coincidem quando as raizes da equação que determina A são eguaes.

Os pontos duplos que vimos de considerar dizem-se *ordinarios*, e dá-se o nome de *nodos* áquelles em que as tangentes são distinctas, e o de *pontos de reversão* áquelles em que estas tangentes coincidem, estendendo assim a significação d'estas palavras, antecedentemente empregadas, de modo a considerar os pontos reaes e imaginarios, e as tangentes reaes e imaginarias das curvas.

Se algum dos valores de A annullar o coefficiente de h^3 em (1), no ponto (x_0, y_0) estão reunidos mais de tres pontos de intersecção da curva com a tangente correspondente ao valor de A considerado.

As tangentes á curva nos pontos triplos, quadruplos, etc., determinam-se do mesmo modo.

Estendendo a significação das palavras, *ponto singular*, empregadas no numero anterior para designar certos pontos *reaes*, dizem-se *singulares* todos os pontos multiplos das curvas consideradas, devendo ainda notar-se que alguns auctores abrangem n'esta designação tambem os pontos de inflexão e os de ondulação.

*

Suppozemos no que precede que a equação $F(x, y) = 0$ da curva dada é algebrica: é porém facil estender esta doutrina ao caso em que esta equação é transcendente, comtanto que a funcção $F(x, y)$ seja susceptivel de ser desenvolvida segundo as potencias inteiras e positivas de $x - x_0$ e $y - y_0$.

138. Supponhamos agora que a curva dada é representada pelas equações $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$, que (x_0, y_0) são as coordenadas de um ponto d'esta curva, correspondente ao valor t_0 da variavel independente t, e que, na vesinhança d'este ponto, temos

$$x = x_0 + (t - t_0)\varphi'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \varphi''(t_0) + \dots,$$

$$y = y_0 + (t - t_0)\psi'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \psi''(t_0) + \dots$$

A recta representada pela equação

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

corta a curva considerada nos pontos correspondentes aos valores do t dados pela equação

$$(t - t_0)[A\varphi'(t_0) + B\psi'(t_0)] + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 [A\varphi''(t_0) + B\psi''(t_0)] + \dots = 0,$$

a qual mostra que em (x_0, y_0) estão reunidos dois, pelo menos, d'aquelles pontos, quando é satisfeita a condição

$$A\varphi'(t_0) + B\psi'(t_0) = 0.$$

N'este caso a recta tem para equação

$$(x - x_0)\psi'(t_0) - (y - y_0)\varphi'(t_0) = 0$$

e é tangente á curva no ponto (x_0, y_0).

Se porém for $\varphi'(t_0) = 0$ e $\psi'(t_0) = 0$, todas as rectas que passam pelo ponto considerado têem duas das suas intersecções com a curva reunidas n'aquelle ponto, exceptuando aquella cujos coefficientes satisfazem á condição

$$A\varphi''(t_0) + B\psi''(t_0) = 0,$$

a qual tem, pelo menos, tres das suas intersecções com a curva reunidas no referido ponto.

N'este caso o ponto (x_0, y_0) é *singular*, e a recta representada pela equação

$$(x - x_0)\,\psi''(t_0) - (y - y_0)\,\varphi''(t_0) = 0$$

é a tangente á curva n'este ponto.

É facil continuar esta discussão.

Assim, por exemplo, no caso da cycloide, cujas equações são (n.º 91-III)

$$x = r(t - \operatorname{sen} t), \quad y = r(1 - \cos t).$$

Por ser

$$x' = r(1 - \cos t), \quad y' = r \operatorname{sen} t,$$

$$x'' = r \operatorname{sen} t, \qquad y'' = r \cos t,$$

vê-se que a curva tem um ponto singular correspondente a $t = 0$, e que a equação da tangente n'este ponto é $x = 0$, como já se sabia.

139. *Transformações algebricas.* — Duas curvas dizem-se *transformadas* uma da outra quando os pontos das duas curvas estão ligados de tal modo que, sendo dada uma, a outra fica determinada. Se esta ligação é estabelecida por meio de relações algebricas entre as coordenadas dos dois pontos, a transformação diz-se *algebrica*. O estudo desenvolvido d'estas transformações, que deu origem a bellos e importantes trabalhos de Poncelet, Chasles, Cremona, Lie, etc., deve ser feito nas obras especialmente consagradas á Geometria. Aqui vamos apenas dar algumas indicações succintas sobre duas d'ellas que têem maior importancia.

I. A primeira transformação que vamos considerar, conhecida pela designação de *homographica*, é aquella em que as coordenadas (x, y) e (X, Y) de dois pontos correspondentes das duas curvas (l) e (l') estão ligados pelas relações

$$X = \frac{ax + by + c}{px + qy + r}, \quad Y = \frac{a'x + b'y + c'}{px + qy + r}.$$

Esta transformação goza das seguintes propriedades fundamentaes:

1.º As variaveis (x, y) podem exprimir-se em funcção de (X, Y) por meio de relações que têem a mesma fórma que as precedentes.

2.º A transformada de qualquer recta é outra recta.

3.º Se o ponto (x, y) de uma curva (l) tender para o ponto (x', y'), o ponto (X, Y) de (l'), correspondente a (x, y), tende para o ponto correspondente a (x', y'), no caso de x' e y' não annullarem o denominador das expressões de X e Y.

Resulta do que precede que, se um ponto A de (l) tender para o ponto A_1, o ponto B da outra curva, correspondente ao primeiro, tende para o ponto B_1, correspondente ao

segundo, e as rectas AA_1 e BB_1 tendem para as tangentes nos pontos A e A_1 ás duas curvas; e portanto que *a tangente a* (l') *no ponto* (X, Y) *é a transformada da tangente a* (l) *no ponto* (x, y). Se (l) tiver em um ponto m tangentes, distinctas ou coincidentes, a outra curva tem tambem, no ponto correspondente, m tangentes, distinctas ou coincidentes, e os dois pontos são ambos multiplos de ordem m, e têem o mesmo numero de tangentes coincidentes.

Do mesmo modo, se uma recta cortar a curva (l) em n pontos, a sua transformada corta a outra curva em n pontos, correspondentes aos primeiros, que coincidem, quando os primeiros coincidirem. Logo *aos pontos de inflexão e ondulação de* (l) *correspondem pontos da mesma natureza em* (l').

A transformação que vimos de considerar tem uma representação geometrica muito notavel: cada curva é a perspectiva da outra, vista de um ponto convenientemente escolhido. Póde vêr se uma demonstração muito simples d'esta proposição em uma nota collocada no fim do nosso *Tratado de las curvas especiales notables*. Póde vêr-se no mesmo logar a demonstração de que a transformação que vimos de considerar, equivale á transformação de Newton:

$$Y = \frac{ay}{x}, \quad X = \frac{c}{x},$$

e a mudanças dos eixos das coordenadas a que estão referidas as duas curvas.

II. A segunda transformação que vamos considerar é aquella em que as coordenadas dos pontos das duas curvas estão ligadas pelas relações

$$X = \frac{m^2 x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{m^2 y}{x^2 + y^2},$$

ou, em coordenadas polares, ρ e ρ_1 representando os vectores do ponto (x, y) e do ponto (X, Y) correspondente, para o mesmo valor do angulo θ que formam com o eixo,

$$\rho\rho_1 = m^2.$$

A esta transformação dá-se o nome de *transformação por raios vectores reciprocos*, a m^2 dá-se o nome de *módulo da transformação*, e cada uma das curvas diz-se *inversa* da outra.

Vamos indicar algumas propriedades fundamentaes d'esta transformação.

1.º A recta cuja equação é

$$AY + BX + C = 0$$

transforma-se na linha representada pela equação

$$m^2(Ax + By) + C(x^2 + y^2) = 0,$$

isto é, em um circulo, quando C é differente de zero, em um recta, quando $C = 0$.

2.º O circulo cuja equação é

$$X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y = R^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

transforma-se no circulo representado pela equação

$$(R^2 - \alpha^2 - \beta^2)(x^2 + y^2) + 2m^2(\alpha x + \beta y) - m^4 = 0,$$

quando $R^2 - \alpha^2 - \beta^2$ é differente de zero, e em uma recta, no caso contrario.

3.º Os angulos formados pelos vectores dos pontos correspondentes das duas curvas com as tangentes respectivas são determinadas pelas fórmulas (n.º 86-IV)

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\rho d\theta}{d\rho}, \quad \operatorname{tang} \omega_1 = \frac{\rho_1 d\theta}{d\rho_1}.$$

Substituindo na ultima ρ_1 pelo valor dado pela equação $\rho\rho_1 = m^2$, vem

$$\operatorname{tang} \omega_1 = -\frac{\rho d\theta}{d\rho} = -\operatorname{tang} \omega.$$

Logo os dois vectores formam angulos eguaes com a recta que une os pontos correspondentes, ficando porém um de cada lado d'esta recta.

Como corollario do que precede conclue-se que, se duas curvas se cortam em um ponto A, as curvas inversas cortam-se no ponto correspondente B, e as tangentes ás segundas em B formam um angulo egual ao que formam as tangentes ás primeiras em A. Em particular, se duas curvas forem tangentes em A, as inversas são tangentes no ponto B correspondente.

4.º Viu-se já que, se (α, β) representam as coordenadas de um *fóco* de uma curva, as rectas representadas pelas equações

$$Y - \beta = \pm i(X - \alpha)$$

são tangentes á curva. Mas as equações das rectas inversas são

$$y - \frac{m^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \pm i\left(x - \frac{m^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\right),$$

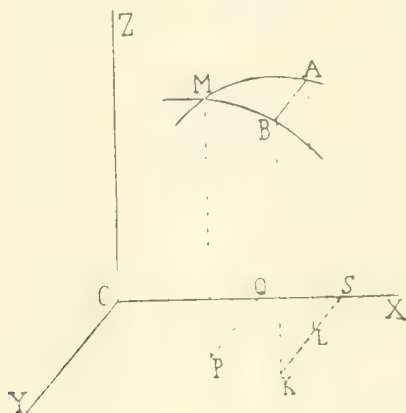
e estas rectas são tangentes á curva inversa. Logo *os fócos de uma curva são os pontos inversos dos fócos de curva inversa.*

II

Curvas no espaço

140. *Contacto de duas curvas no espaço.* — Sejam

$$y=f(x), \quad z=f_1(x); \quad Y=F(X), \quad Z=F_1(X)$$

as equações de duas curvas no espaço, que se cortem no ponto M, cujas coordenadas são

(x_0, y_0, z_0). A distancia BA, que representaremos por d, de dois pontos d'estas curvas, correspondentes á mesma abscissa x_0+h, é dada pela fórmula

$$d=\sqrt{[F(x_0+h)-f(x_0+h)]^2+[F_1(x_0+h)-f_1(x_0+h)]^2}.$$

Se d for infinitamente pequeno de ordem $n+1$ relativamente a h, diz-se que as curvas consideradas têem no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n. Vê-se, como no n.º 130, que n'este caso, na visinhança do ponto dado, as curvas se approximam mais uma da outra do que de qualquer outra curva com a qual tenham um contacto de ordem inferior.

Procuremos as condições analyticas para que as curvas dadas tenham um contacto de ordem n no ponto considerado. Para isso, notemos que é condição necessaria e sufficiente para que d seja infinitamente pequeno de ordem $n+1$, relativamente a h, que as differenças

$$\alpha=F(x_0+h)-f(x_0+h), \quad \beta=F_1(x_0+h)-f_1(x_0+h)$$

o sejam, ou que uma seja de ordem $n+1$ e a outra de ordem superior. Com effeito, suppondo

que uma das differenças é da ordem $n+1$ e que a outra é da ordem $n+1+i$, temos (n.º 54)

$$\beta = h^{n+1}(A+\varepsilon), \quad \alpha = h^{n+1+i}(B+\varepsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas, differentes de zero, e ε e ε' são quantidades infinitamente pequenas com h; e portanto

$$d = h^{n+1}\sqrt{(A+\varepsilon)^2 + h^{2i}(B+\varepsilon')^2},$$

d'onde se deduz que d é da ordem $n+1$ relativamente a h.

Reciprocamente, se d for da ordem $n+1$ relativamente a h, uma das quantidades α ou β é da ordem $n+1$ e a outra é da mesma ordem ou de ordem superior; porque, se a que é de menor ordem fosse de ordem m differente de $n+1$, tambem d seria da ordem m, em virtude do que vimos de demonstrar.

Para achar pois as condições analyticas do contacto de ordem n, basta exprimir que uma das quantidades α ou β é infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h e que a outra é da mesma ordem ou de ordem superior. Raciocinando para isso como no caso das curvas planas (n.º 131), acham-se as equações de condição

$$f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = F^{(n)}(x_0),$$

$$f_1(x_0) = F_1(x_0),\ f_1'(x_0) = F_1'(x_0),\ \ldots,\ f_1^{(n)}(x_0) = F_1^{(n)}(x_0),$$

a que deve satisfazer x_0.

Vê-se tambem, como no caso das curvas planas, que, se tomarmos para variavel independente uma nova variavel t, o que dá $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \pi(t)$, $Y = \theta(t)$ e $Z = \varpi(t)$, as equações de condição para o contacto de ordem n são

$$y = Y,\ y' = Y',\ \ldots,\ y^{(n)} = Y^{(n)},$$

$$z = Z,\ z' = Z',\ \ldots,\ z^{(n)} = Z^{(n)},$$

y', z', Y', Z', etc. representando as derivadas de y, z, Y, Z relativamente a t.

Se uma das curvas for completamente dada e as equações $Y = F(X)$, $Z = F_1(X)$ representarem uma familia de curvas, a curva d'esta familia que tem com a curva dada um contacto de ordem mais elevada, diz-se *osculadora* da primeira. Para obter esta curva, devem-se determinar os parametros arbitrarios que entram nas equações $Y = F(X)$ e $Z = F_1(X)$, cujo numero supporemos egual a $2(n+1)$, por meio das equações de condição precedentes.

I. Appliquemos os principios anteriores á linha recta, isto é, procuremos a recta que passa

pelo ponto (x, y, z) da curva representada pelas equações $y = f(x)$ e $z = f_1(x)$ e que tem um contacto de ordem a mais elevada possivel com esta curva.

As equações da recta são da fórma $Y = AX + B$, $Z = CX + D$, e podemos portanto determinar as quatro constantes A, B, C e D de modo a satisfazer ás quatro equações necessarias para o contacto de primeira ordem:

$$y = Ax + B,\ z = Cx + D,\ f'(x) = A,\ f'_1(x) = C.$$

Logo as equações da recta pedida são

$$Y - y = f'(x)(X - x),\ Z - z = f'_1(x)(X - x),$$

e a recta coincide portanto com a tangente á curva no ponto (x, y, z) (n.º 92).

O contacto da curva com a tangente é de primeira ordem, excepto nos pontos que satisfazem ás equações $f''(x) = 0$ e $f''_1(x) = 0$, onde é de ordem superior á primeira.

II. Procuremos em segundo logar o *circulo osculador* da curva representada pelas equações $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ e $z = \pi(t)$ no ponto (x, y, z).

Como toda a circumferencia póde resultar da intersecção de uma esphera com um plano que passe pelo seu centro (a, b, c), póde esta curva ser representada pelas equações

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2,$$

$$\alpha(X - a) + \beta(Y - b) + \gamma(Z - c) = 0.$$

N'estas equações ha seis constantes arbitrarias distinctas, que vamos determinar de modo a satisfazer ás seis equações necessarias para que a circumferencia e a curva tenham um contacto de segunda ordem no ponto (x, y, z), isto é, ás equações seguintes:

$$(b)\qquad \begin{cases} \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = 0, \\ \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0, \quad \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'' = 0, \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, \\ (x - a)x' + (y - b)y' + (z - c)z' = 0, \\ (x - a)x'' + (y - b)y'' + (z - c)z'' + s'^2 = 0, \end{cases}$$

onde se representa por s'^2 a somma $x'^2 + y'^2 + z'^2$.

Eliminando α, β e γ entre a segunda, a terceira das equações precedentes e a equação

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0,$$

aquellas quantidades e attendendo ás relações

$$x'^2+y'^2+z'^2=1,\quad x'x''+y'y''+z'z''=0,$$

vem

$$a=x+\mathrm{R}^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad b=y+\mathrm{R}^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad c=z+\mathrm{R}^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Á recta que une o ponto (x, y, z) da curva ao centro de curvatura correspondente chama-se *normal principal*. Á recta perpendicular ao plano osculador, tirada pelo ponto (x, y, z), chama-se *binormal*. Adiante nos occuparemos outra vez d'estas rectas importantes.

141. Entre o circulo osculador da curva dada e a envolvente dos seus planos normaes existe uma relação importante que vamos considerar.

A equação do plano normal á curva dada no ponto (x, y, z) é (n.º 92-III)

$$(\mathrm{X}-x)x'+(\mathrm{Y}-y)y'+(\mathrm{Z}-z)z'=0,$$

e portanto a equação da superficie envolvente das posições que toma este plano, quando t varía, é dada pela eliminação de t entre a equação precedente e a seguinte:

$$(\mathrm{X}-x)x''+(\mathrm{Y}-y)y''+(\mathrm{Z}-z)z''=s'^2.$$

A caracteristica d'esta superficie que passa pelo ponto (x, y, z) é representada por estas duas equações e esta caracteristica é portanto perpendicular ao plano

$$\mathrm{A}(\mathrm{X}-x)+\mathrm{B}(\mathrm{Y}-y)+\mathrm{C}(\mathrm{Z}-z)=0,$$

quando entre A, B e C existem as relações

$$\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}z'=0,$$
$$\mathrm{A}x''+\mathrm{B}y''+\mathrm{C}z''=0,$$

isto é, ao plano osculador da curva dada no ponto considerado.

Comparando as equações da mesma caracteristica com as duas ultimas equações (b), vê-se que esta recta passa pelo centro (a, b, c) do circulo osculador.

Temos pois o theorema seguinte:

As rectas perpendiculares aos planos osculadores de uma curva, tirados pelos centros dos circulos osculadores, formam uma superficie planificavel, que coincide com a superficie envolvente dos planos normaes á mesma curva.

Este theorema é devido a Monge, que foi quem primeiro considerou esta superficie, á qual deu o nome de *superficie polar.*

As equações da aresta de reversão da superficie polar são as seguintes:

$$(X-x)\,x' + (Y-y)\,y' + (Z-z)\,z' = 0,$$

$$(X-x)\,x'' + (Y-y)\,y'' + (Z-z)\,z'' = s'^2,$$

$$(X-x)\,x''' + (Y-y)\,y''' + (Z-z)\,z''' = 3s's'',$$

que determinam as coordenadas (X, Y, Z) dos seus pontos em funcção da variavel t.

III

Superficies

142. *Contacto de uma curva com uma superficie.* — Sejam

$$Z = F(X, Y),$$

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x)$$

as equações de uma superficie e de uma curva que se cortam em um ponto, e supponhamos que é da ordem n o contacto de ordem mais elevada que a curva dada tem com as curvas traçadas sobre a superficie. N'este caso diz-se que *a superficie e a curva têem no ponto considerado um contacto de ordem n.* É facil achar as equações de condição para que isto se dê.

Notemos para isso, primeiramente, que as equações de condição a que deve satisfazer a abscissa do ponto considerado para que a curva dada e a curva representada pelas equações $Z = F(X, Y)$, $Y = \varphi(X)$, a qual resulta de projectar a primeira sobre a superficie por meio de rectas parallelas ao eixo dos z, tenham n'este ponto um contacto de ordem n, são (n.º 140)

$$F[x, \varphi(x)] = \psi(x), \quad \frac{dF[x, \varphi(x)]}{dx} = \psi'(x), \; \ldots, \; \frac{d^n F[x, \varphi(x)]}{dx^n} = \psi^n(x).$$

Notemos, em segundo logar, que as eqnações de condição a que deve satisfazer a abscissa do mesmo ponto, para que a curva tenha um contacto de ordem m com outra curva qualquer, collocada sobre a superficie, e representada pelas equações

$$Z = F(X, Y), \quad Y = \theta(X),$$

são

$$F[x, \theta(x)] = \psi(x), \quad \frac{dF[x, \theta(x)]}{dx} = \psi'(x), \quad \ldots, \quad \frac{d^m F[x, \theta(x)]}{dx^m} = \psi^{(m)}(x),$$

$$\theta(x) = \varphi(x), \quad \theta'(x) = \varphi'(x), \quad \ldots \quad \theta^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x).$$

Basta agora attender a que as equações contidas na primeira linha coincidem (em virtude das que entram na segunda) com as equações que exprimem que o contacto da curva dada com a curva especial primeiramente considerada é da ordem m, para concluir que m não póde ser superior a n.

As condições a que deve satisfazer a abscissa de um ponto da curva dada, para que n'elle tenha um contacto de ordem n com a superficie, coincidem pois com as que exprimem que a curva tem um contacto de ordem n com a que resulta de a projectar sobre a superficie por meio de rectas parallelas ao eixo dos z; e, pondo $F[x, \varphi(x)] = f(x)$, podem ser escriptas do modo seguinte:

$$f(x) = \psi(x), \quad f'(x) = \psi'(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = \psi^{(n)}(x).$$

Se, tomando t para variavel independente, for $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \pi(t)$, vê-se como no n.º 131 que temos, pondo $F[\varphi(t), \psi(t)] = f(t)$,

$$f(t) = \pi(t), \quad f'(t) = \pi'(t), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(t) = \pi^{(n)}(t).$$

Logo, para achar as condições do contacto de ordem n da curva com a superficie, basta substituir na equação da superficie X, Y e Z por x, y e z, formar depois as derivadas da equação resultante, relativamente a t, até á ordem n, e substituir finalmente n'estas equações t pelo valor que tem esta quantidade no ponto considerado.

Se a curva for completamente dada assim como a especie da superficie, a superficie da especie considerada que tem com a curva um contacto de ordem mais elevada no ponto (x, y, z), diz-se *osculadora* da curva n'este ponto. Para achar esta superficie, basta determinar as constantes arbitrarias, cujo numero supporemos egual a $n+1$, que entram na equação $Z = (X, Y)$, de modo que as $n+1$ condições precedentes sejam satisfeitas.

I. Procuremos a equação do *plano osculador* da curva $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \pi(t)$ no ponto (x, y, z). Temos para isso de determinar as constantes que entram na equação

$$AX + BY + CZ = D$$

de modo que sejam satisfeitas as equações de condição

$$Ax + By + Cz = D, \quad Ax' + By' + Cz' = 0, \quad Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

onde x', y', etc. representam as derivadas de x, y e z relativamente a t; o que leva a uma equação que coincide com a equação (5) do n.º 92-IV, justificando assim a designação que foi dada ao plano estudado n'esse numero.

O plano osculador tem com a curva um contacto de segunda ordem, excepto no caso de as coordenadas do ponto satisfazerem á condição que resulta de eliminar A, B e C entre as equações precedentes e a seguinte:

$$Ax''' + By''' + Cz''' = 0,$$

isto é, á condição

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Os planos osculadores da curva n'estes pontos, onde a torsão é nulla, dizem-se *estacionarios*.

II. Consideremos ainda a esphera osculadora da mesma curva.

Temos, para a obter, de determinar as constantes α, β, γ e ρ, que entram na equação

$$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 + (Z-\gamma)^2 = \rho^2,$$

por meio das relações

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \rho^2,$$

$$(x-\alpha)x' + (y-\beta)y' + (z-\gamma)z' = 0,$$

$$(x-\alpha)x'' + (y-\beta)y'' + (z-\gamma)z'' = -s'^2,$$

$$(x-\alpha)x''' + (y-\beta)y''' + (z-\gamma)z''' = -3s's''.$$

Comparando estas equações com as que determinam (n.º 141) a aresta de reversão da superficie polar da curva dada, vê-se que α, β e γ satisfazem a estas equações. Logo *o logar dos centros das espheras osculadoras coincide com a aresta de reversão da superficie polar.*

Quando $t = s$, as coordenadas (α, β, γ) do centro da esphera osculadora no ponto (x, y, z) da curva são determinadas pelas equações

$$\alpha = x - \frac{y'z''' - z'y'''}{D}, \quad \beta = y - \frac{z'x''' - x'z'''}{D}, \quad \gamma = z - \frac{x'y''' - y'x'''}{D},$$

onde D representa o determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

O raio ρ da esphera considerada é dado pela fórmula

$$\rho^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'''^2 + y'''^2 + z'''^2) - (x' x''' + y' y''' + z' z''')}{D^2}.$$

143. *Contacto de duas superficies.* — Sejam

$$z = f(x, y), \quad Z = F(X, Y)$$

as equações de duas superficies que se cortam no ponto (x, y, z) e

$$Y - y = A(X - x)$$

a equação de um plano arbitrario, tirado por este ponto perpendicularmente ao plano xy.

Se as duas curvas que este plano determina pela sua intersecção com as superficies têem um contacto de ordem n no ponto considerado, qualquer que seja a posição do plano, diz-se que *as duas superficies têem no ponto (x, y, z) um contacto de ordem n.*

Para obter as condições a que devem satisfazer as coordenadas do ponto dado para que isto tenha logar, basta notar que as condições para o contacto de ordem n das curvas correspondentes a um valor determinado de A, são

$$F(x, y) = f(x, y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} A = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} A,$$

. . . .

Devendo estas equações ter logar qualquer que seja o valor de A, conclue-se que *as condições para que as duas superficies tenham um contacto de primeira ordem no ponto (x, y, z) são*

$$F(x, y) = f(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y};$$

que as condições para que as duas superficies tenham um contacto de segunda ordem no ponto (x, y, z) *são, além das precedentes, as seguintes:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

e assim successivamente.

141. Uma superficie de especie dada $Z = F(X, Y)$ diz-se *osculadora* de uma superficie dada $z = f(x, y)$, se a primeira tem com a segunda o contacto de ordem mais elevada que as superficies da especie considerada podem ter com a superficie dada. Se a superficie $Z = F(X, Y)$ contem m constantes arbitrarias, podemos determinar estas constantes de modo que as superficies tenham, em geral, um contacto de ordem n, se m for egual ao numero de equações necessarias para haver contacto de ordem n. Se for menor, póde estabelecer-se só um contacto de ordem inferior a n, e a equação fica ainda com algumas constantes arbitrarias.

I. A equação $Z = AX + BY + C$ contendo tres constantes arbitrarias, póde o plano ter um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$. Para achar o plano que satisfaz a esta condição, determinem-se as constantes arbitrarias por meio das tres equações de condição para haver contacto de primeira ordem, que dão

$$z = Ax + By + C, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial y};$$

portanto a equação do *plano osculador* da superficie é

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y),$$

e coincide com a equação do plano tangente (n.º 94).

II. Consideremos, em segundo logar, a esphera

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2.$$

Podemos dispôr de tres das constantes arbitrarias que contem esta equação, de modo a satisfazer ás tres equações de condição necessarias para que esta superficie tenha um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$.

Para obter um contacto de segunda ordem, é necessario que a equação da superficie $Z = F(X, Y)$ contenha seis constantes arbitrarias, e portanto a esphera não póde ter um contacto de segunda ordem com a superficie dada, excepto em alguns pontos particulares d'esta superficie, como vamos ver.

Para haver contacto de segunda ordem, os valores de Z, $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$, tirados da equação da esphera e das equações

$$X - a + (Z - c)\frac{\partial Z}{\partial X} = 0,\quad Y - b + (Z - c)\frac{\partial Z}{\partial Y} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0,\quad 1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial X} + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = 0,$$

devem ser eguaes respectivamente a $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, quando n'ellas se faz $X = x$ e $Y = y$, o que dá as equações de condição

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

$$x - a + (z - c)\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\quad y - b + (z - c)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + (z - c)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\quad 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + (z - c)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + (z - c)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

As quatro primeiras equações servem para determinar as constantes arbitrarias a, b, c e R. As duas ultimas, eliminando $z - c$ por meio da quarta, dão as equações

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

a que deve satisfazer o ponto (x_0, y_0, z_0) da superficie $z = f(x, y)$, para que n'elle a superficie possa ter uma esphera osculadora.

Tomando o ponto (x_0, y_0, z_0) para origem das coordenadas, o plano tangente para plano dos xy e os planos das secções principaes para planos dos xz e yz, e chamando $z = f_1(x, y)$ a nova equação da superficie, as equações precedentes dão [representando por p_0, q_0, r_0, s_0 e t_0 os valores que tomam as derivadas $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}$ no ponto (0, 0, 0)] $r_0 = t_0$, $s_0 = 0$, visto ser (n.º 95) $p_0 = 0$ e $q_0 = 0$. Mas as curvaturas c_1 e c_2 das secções principaes

que passam pelo ponto $(0, 0, 0)$ são (n.º 95) dadas pelas fórmulas $c_1 = r_0$ e $c_2 = t_0$. Portanto temos $c_1 = c_2$; o que prova que *os pontos em que a superficie tem um contacto de segunda ordem com uma esphera coincidem com os pontos umbilicaes* (n.º 95).

Para um estudo mais desenvolvido e profundo da theoria do cantacto, consulte-se o bello *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique de Paris* de Hermite.

145. *Pontos singulares das superficies.* — Consideremos a superficie representada pela equação $f(x, y, z) = 0$ e um ponto (x_0, y_0, z_0) situado sobre ella, e applicando a fórmula de Taylor, escrevamos esta equação debaixo da fórma

$$\begin{aligned} & f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \\ + & \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2 + \ldots\right] \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

A recta representada pelas equações

$$y - y_0 = \mathrm{A}(x - x_0), \quad z - z_0 = \mathrm{B}(x - x_0)$$

corta esta superficie em pontos cujas abscissas são determinadas pela equação

$$\begin{aligned} & (x - x_0)\left[f'_x(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{A}f'_y(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{B}f'_z(x_0, y_0, z_0)\right] \\ + & \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left[f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) + 2\mathrm{A}f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{A}^2 f''_{yy}(x_0, y_0, z_0) + \ldots\right] \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \end{aligned}$$

um dos quaes coincide com (x_0, y_0, z_0), a qual mostra que n'este ponto estão reunidas duas intersecções, pelo menos, da recta com a superficie, quando A e B satisfazem á condição

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{A}f'_y(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{B}f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Eleminando A e B entre esta equação e as da recta, vê-se que todas as rectas que satisfazem á condição indicada estão situadas no plano representado pela equação

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

isto é, no plano tangente (n.º 94) á superficie no ponto (x_0, y_0, z_0).

Se porém for

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

não existe plano tangente, e todas as rectas que passam pelo ponto considerado têem duas, pelo menos, das suas intersecções com a superficie reunidas no ponto (x_0, y_0, z_0).

Entre as rectas que, n'este caso, passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0) convem notar aquellas cujos coefficientes angulares satisfazem á condição

$$f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) + 2\mathrm{A} f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) + \mathrm{A}^2 f''_{yy}(x_0, y_0, z_0) + \ldots = 0,$$

as quaes têem tres das suas intersecções com a curva reunidas no ponto considerado. Eliminando A e B entre esta equação e as das rectas, obtem-se a equação

$$f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)^2 + \ldots = 0,$$

a qual representa um *cone de segunda ordem*, que se diz *tangente á superficie* no ponto (x_0, y_0, z_0). N'este caso o ponto (x_0, y_0, z_0) diz-se *duplo*.

Se todas as derivadas parciaes de primeira e de segunda ordem de $f(x, y, z)$ forem nullas no ponto (x_0, y_0, z_0) e alguma derivada de terceira o não for, o ponto diz-se *triplo*, e vê-se do mesmo modo que existe um cone de terceira ordem que é o logar geometrico de todas as rectas que têem, pelo menos, tres das suas intersecções com a superficie reunidas em (x_0, y_0, z_0).

Em geral, se as derivadas parciaes de $f(x, y, z)$ até á ordem n forem todas nullas no ponto (x_0, y_0, z_0) e alguma das de ordem $n+1$ for differente de zero, este ponto diz-se *multiplo de ordem n*, e existe um cone de ordem n que é o logar geometrico das rectas que têem n, pelo menos, das suas intersecções com a superficie reunidas no referido ponto.

Os pontos multiplos e os pontos da superficie considerada em que a doutrina precedente não tem logar, por não lhe ser applicavel o desenvolvimento pela fórmula de Taylor de que se partiu, dizem-se *singulares*.

146. *Pontos singulares das curvas enviezadas.* — Consideremos a curva representada pelas equações $f(x, y, z) = 0$, $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$ e um ponto (x_0, y_0, z_0) situado sobre ella, e escrevam-se estas equações do modo seguinte:

$$u_1 + u_2 + \ldots = 0, \quad v_1 + v_2 + \ldots = 0,$$

onde

$$u_1 = f'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0),$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)(y-y_0) + \ldots\right],$$

e onde v_1, v_2, ... representam as funcções que se obtêem mudando nas expressões precedentes a lettra f pela lettra F.

Posto isto, viu-se no n.º 92 que a tangente á curva considerada no ponto (x_0, y_0, z_0) é

dada pelas equações $u_1 = 0$ e $v_1 = 0$, que representam os planos tangentes ás duas superficies que entram na sua definição. Se porém estes planos tangentes coincidem, o que tem logar quando (x_0, y_0, z_0) satisfaz as condições

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) : F'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) : F'_y(x_0, y_0, z_0)$$
$$= f'_z(x_0, y_0, z_0) : F'_z(x_0, y_0, z_0),$$

os dois planos não determinam recta alguma, e o ponto diz-se *singular*. Considerando então a superficie representada pela equação

$$u_2 - v_2 + u_3 - v_3 + \ldots = 0,$$

a qual passa pela curva dada, o cone de segunda ordem representado pela equação

$$u_2 - v_2 = 0,$$

o qual é formado pelas rectas que têem tres, pelo menos, das suas intersecções com a superficie precedente reunidas em (x_0, y_0, z_0), e o plano $u_1 = 0$, tangente ás superficies dadas, cortam-se segundo duas rectas que se dizem *tangentes* á curva, e o ponto diz-se *duplo*.

Se for tambem $u_2 = v_2$, o plano $u_1 = 0$ e o cone de terceira ordem representado pela equação $u_3 - v_3 = 0$ cortam-se segundo tres rectas, que se dizem *tangentes* á curva no ponto (x_0, y_0, z_0), e este ponto diz-se *triplo*.

Não continuaremos esta discussão, que é facil, e terminaremos observando que a doutrina precedente só é applicavel ao ponto (x_0, y_0, z_0) quando os desenvolvimentos pela fórmula de Taylor de que se partiu têem logar n'este ponto.

CAPITULO VII

Funcções definidas por series. Singularidades das funcções

I

Funcções definidas por series

147. Vamos n'este Capitulo estudar as funcções definidas por series, para estabelecer as condições da sua continuidade e achar as suas derivadas. Em seguida formaremos, por meio d'estas funcções, exemplos das singularidades mais importantes, relativamente á continuidade e ás derivadas, que as funcções apresentam.

148. *Continuidade das funcções definidas por series.* — A este respeito vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. *Se a serie*

$$(1) \qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

for uniformemente convergente em um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, a funcção $f(x)$ é continua nos pontos d'este intervallo em que as funcções $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc. são continuas.

Seja a um d'estes pontos. Por ser uniformemente convergente a serie anterior, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde (n.º 26) um numero m tal que será

$$\left|\sum_{m+1}^{\infty} f_n(a)\right| < \frac{\delta}{3}, \qquad \left|\sum_{m+1}^{\infty} f_n(a+h)\right| \leqq \frac{\delta}{3},$$

qualquer que seja o valor de h, com a condição de $a+h$ pertencer ao intervallo considerado.

Mas, por ser continua no ponto a a somma (n.º 36)

$$P_m(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

póde-se sempre dar a ε um valor positivo tal que a desegualdade

$$|P_m(a+h)-P_m(a)|<\frac{1}{3}\delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h|<\varepsilon$ (n.º 36-1.º).

D'estas desegualdades e da egualdade

$$f(a+h)-f(a)=P_m(a+h)-P_m(a)+\sum_{n=m+1}^{\infty}f_n(a+h)-\sum_{n=m+1}^{\infty}f_n(a)$$

conclue-se pois que, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a δ, ha sempre um valor de ε tal que a desegualdade

$$|f(a+h)-f(a)|<\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}$$

é satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h|<\varepsilon$. Logo a funcção é continua no ponto a.

149. *Derivadas das funcções definidas por series.* — Principiaremos o que temos a dizer sobre as derivadas das funcções definidas por series, fazendo notar que as series cujos termos são as derivadas dos termos de uma serie convergente, póde ser divergente. Assim a serie $\Sigma(-1)^n\frac{x^n}{n}$ é convergente quando é $x=1$, em quanto que a serie $\Sigma(-1)^n x^{n-1}$, formada pelas derivadas dos seus termos, é n'este caso divergente. Posto isto, vamos demonstrar o seguinte:

THEOREMA. *Se a serie (1) for convergente em um intervallo comprehendido entre dois numeros dados, e se no mesmo intervallo for uniformemente convergente a serie $\Sigma f'_n(x)$, formada pelas derivadas dos termos da precedente, a funcção $f(x)$ admitte derivada e temos*

$$f'(x)=f'_1(x)+f'_2(x)+\ldots+f'_n(x)+\ldots$$

no intervallo considerado.

Seja a um valor qualquer de x, pertencente ao intervallo considerado, e ponhamos para brevidade

$$R(x)=\sum_{m+p+1}^{\infty}f_n(x),\quad R_1(x)=\sum_{m+p+1}^{\infty}f'_n(x).$$

Teremos

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \sum_1^{\infty} f'_n(a) = \sum_1^{m} \left| \frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right| + \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a)$$

$$= \sum_1^{m} \left[\frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right] + \sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)] + \frac{R_1(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a),$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Por ser uniformemente convergente a serie $\Sigma f'_n(x)$ no intervallo considerado, se dermos a δ um valor tão pequeno quanto se queira, podemos determinar um valor correspondente para m tal que as desegualdades

$$\left| \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a) \right| < \frac{\delta}{10}, \quad \left| \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a+\theta h) \right| < \frac{\delta}{10}$$

sejam satisfeitas por todos os valores do inteiro p e por todos os valores de h, com a condição de $a+h$ pertencer ao intervallo considerado. Logo a desegualdade

$$\left| \sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)] \right| < \frac{\delta}{5}$$

é tambem satisfeita pelos mesmos valores de p e h.

Por outra parte, por ser

$$\sum_1^{m} f'_n(a) = \lim_{h=0} \sum_1^{m} \frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h},$$

podemos concluir que existe um valor h_1 tal que a desegualdade

$$\sum_1^{m} \left| \frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} - f'_n(a) \right| < \frac{\delta}{5}$$

(onde m tem um valor finito anteriormente determinado) é satisfeita por todos os valores de h que satisfazem á condição $|h| < h_1$.

Finalmente, por serem convergentes as series $\Sigma f_n(x)$ e $\Sigma f'_n(x)$, a cada valor de h corresponderá um valor de p tal que será

$$\left| \frac{R(a+h)}{h} \right| < \frac{\delta}{5}, \quad \left| \frac{R(a)}{h} \right| < \frac{\delta}{5}, \quad |R_1(a)| < \frac{\delta}{5}.$$

Das desegualdades precedentes e da egualdade de que se partiu, conclue-se que, dando

a δ um valor tão pequeno quanto se queira, ha sempre um valor correspondente h_1 tal que a desegualdade

$$\left| \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \sum_1^\infty f'_n(a) \right| < \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5}$$

será satisfeita pelos valores de h que satisfazem á condição $|h| < h_1$; e, portanto, teremos

$$\lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \sum_1^\infty f'_n(a),$$

que é o que se queria demonstrar.

II

Singularidades de algumas funcções

150. *Funcções discontinuas em pontos isolados.* — Uma funcção $f(x)$, definida na visinhança do ponto a, é discontinua no ponto $x = a$, quando n'este ponto se torna infinita ou passa de um valor a outro. Da primeira especie de discontinuidade temos até aqui encontrado exemplos nas funcções racionaes, quando a é raiz do denominador, na funcção $\operatorname{tang} x$, quando é $x = \left(k + \frac{1}{2}\pi\right)$, k representando um numero inteiro, etc. Para exemplo da segunda especie de discontinuidade, da qual não offerecem exemplo as funcções que até aqui temos estudado, apresentarei a funcção definida pela serie seguinte:

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)} + \dots + \frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})} + \dots$$

Com effeito, temos evidentemente

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = -1 + \frac{2}{1+x^m},$$

$$\frac{1}{1+x^m} = \frac{1}{1+x^{m-1}} + \frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})},$$

$$\frac{1}{1+x^{m-1}} = \frac{1}{1+x^{m-2}} + \frac{x^{m-2}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^{m-2})},$$

. . . .

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)},$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} + \frac{1-x}{2(1+x)},$$

d'onde se tira

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = \frac{2(1-x)}{2(1+x)} + \frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)} + \ldots + \frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)},$$

e portanto

$$\lim_{m=\infty} \frac{1-x^m}{1+x^m} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}.$$

D'esta egualdade conclue-se que a funcção considerada é egual a $+1$, se o valor absoluto de x é menor do que a unidade, que é egual a -1, se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, que é egual a zero, se é $x=1$, e que é egual ao infinito, se é $x=-1$. A funcção é pois discontinua no ponto $x=1$, onde passa do valor $+1$ ao valor -1, e no ponto $x=-1$ onde é infinita.

151. *Condensação das singularidades.* — As funcções que até aqui temos encontrado apresentam em um intervallo finito um numero finito de pontos em que são discontinuas. Ha porém funcções que, em um intervallo finito, são discontinuas em um numero infinito de pontos, separados por outros em que são continuas, e ha funcções que, em um intervallo finito, são discontinuas em todos os pontos. Para formar funcções d'esta natureza, póde-se seguir um methodo, devido a Hankel [1] e por elle chamado *methodo da condensação das singularidades*, por meio do qual, partindo de uma funcção com um numero limitado de singularidades, se fórma uma funcção com infinitas singularidades. Vamos aqui expôr a parte fundamental d'este methodo, que se póde estudar desenvolvidamente no excellente livro de Dini: *Fundamenti per la teorica delle funzione di variabili reali.*

I. Represente-se por $\varphi(y)$ uma funcção de y que no intervallo entre $y=-1$ e $y=+1$, o ponto 0 sendo exceptuado, seja continua e menor do que uma quantidade M, que no ponto $y=0$ seja nulla e que, quando y tende para zero passando separadamente por valores positivos e negativos, tenda para um limite differente de zero, ou para dois limites, um dos quaes, pelo menos, seja differente de zero.

A funcção φ (sen $p\pi x$), onde p é inteiro, será nulla e discontinua nos pontos onde $x=\frac{m}{p}$ (m inteiro), e será continua nos outros pontos.

N'estes ultimos pontos, a funcção

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n \varphi(\operatorname{sen} n\pi x) \tag{1}$$

(1) Hankel: — *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.* — Tubingue, 1870.

é tambem continua, se A_1, A_2, etc. representarem quantidades positivas taes que seja convergente a serie $\sum_1^\infty A_n$. Com effeito, n'este caso, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor α_1 de α tal que a desegualdade

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} MA_n < \delta$$

é satisfeita quando $\alpha > \alpha_1$. Logo a desegualdade

$$\left| \sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} A_n \varphi(\text{sen}\, n\pi x) \right| < \delta$$

é tambem satisfeita pelos mesmos valores de α. A serie (1) é pois uniformemente convergente, e portanto a funcção $f(x)$ é continua (n.º 148) nos pontos considerados.

Consideremos agora os pontos em que a funcção $\varphi(\text{sen}\, p\pi x)$ é discontinua; e seja primeiramente m um numero par.

Pondo $n = ap + b$, onde b representa um numero inteiro menor do que p, temos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \Sigma A_{ap+b}\, \varphi\left[\text{sen}\,(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right],$$

onde Σ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros e positivos de a e b, excluindo os termos correspondentes a $b = 0$, os quaes são nullos.

Do mesmo modo temos

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) = \Sigma A_{ap+b}\, \varphi\left[\text{sen}\,(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right]$$

ou, separando os termos correspondentes a $b = 0$,

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) = \Sigma A_{ap+b}\, \varphi\left[\text{sen}\,(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right] + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi(\text{sen}\, aph\pi).$$

Logo temos

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) = \Sigma A_{ap+b} \left\{ \varphi\left[\text{sen}\,(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right] - \varphi\left[\text{sen}\,(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right] \right\}$$
$$+ \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi(\text{sen}\, aph\pi).$$

Mas, empregando uma analyse semelhante á que foi usada precedentemente para demonstrar que a funcção definida pela serie (1) é continua quando x é irracional, vê-se que a funcção $\Sigma A_{ap+b}\, \varphi[\text{sen}\,(ap+b)\pi x]$ é continua no ponto $x = \frac{m}{p}$, quando b differente de zero, e que é, portanto,

$$\lim_{h=0} \varphi\left[\text{sen}\,(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right] = \varphi\left[\text{sen}\,(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right].$$

Vem pois

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p}+h\right)-f\left(\frac{m}{p}\right)\right]=\lim_{h=0}\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi).$$

Quer h tenda para zero passando por valores positivos, quer h tenda para zero passando por valores negativos, da uniformidade de convergencia da serie

$$\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi),$$

na visinhança do ponto $h=0$, conclue-se que, por mais pequeno que seja o valor que se dê a δ, ha sempre um valor α_1 tal que a desegualdade

$$\left|\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)\right|<\frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de α superiores a α_1, qualquer que seja o valor que se dê a h, entre certos limites.

Por outra parte, por ser convergente a serie ΣA_{ap}, existe um numero α_2 tal que a desegualdade

$$\left|\lim_{h=0}\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\right|<\text{M}\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}<\frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de α superiores a α_2.

Logo as duas desegualdades precedentes são satisfeitas simultaneamente pelos valores de α superiores a α_1 e α_2.

Por outra parte, existe sempre um valor h_1 tal que a desegualdade

$$\left|\sum_{a=1}^{\alpha}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)-\lim_{h=0}\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)\sum_{a=1}^{\alpha}A_{ap}\right|<\frac{\delta}{3}$$

é satisfeita pelos valores de h que verificam a condição $|h|<h_1$.

D'estas tres desegualdades resulta

$$\left|\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)-\lim_{h=0}\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\right|<\delta,$$

quando $|h|<h_1$; e portanto temos

$$\lim_{h=0}\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)=\lim_{h=0}\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap},$$

e

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p}+h\right)-f\left(\frac{m}{p}\right)\right]=\lim_{h=0}\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi)\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}.$$

Como, por hypothese, um pelo menos dos dois valores de $\lim_{h=0} \varphi(\operatorname{sen} aph\pi)$, correspondentes um a valores positivos e outro a valores negativos de h, é differente de zero, a funcção $f(x)$ é discontinua nos pontos onde $x = \frac{m}{p}$.

Por uma analyse semelhante se mostra que a funcção $f(x)$ é discontinua nos pontos onde $x = \frac{m}{p}$, quando m é impar.

Logo a funcção $f(x)$ é continua nos pontos em que x é irracional, e é discontinua nos pontos em que x é racional.

Para applicar o methodo anterior, é necessario formar uma funcção $\varphi(y)$ que satisfaça ás condições impostas anteriormente a esta funcção. Póde servir para este fim a seguinte:

$$\varphi(y) = -2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{y(y+1)^{l-1}}{[(y+1)^l + 1][(y+1)^{l-1} + 1]},$$

que se deduz da serie que considerámos no n.º 150, pondo $x = y + 1$.

Com effeito, sendo aquella serie egual a $+1$, 0 ou -1, segundo é $x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$, será esta egual a $+1$, 0 ou -1, segundo é $y < 0$, $y = 0$ ou $y > 0$.

Temos pois a funcção

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen} n\pi x (\operatorname{sen} n\pi x + 1)^{l-1}}{[(\operatorname{sen} n\pi x + 1)^l + 1][(\operatorname{sen} n\pi x + 1)^{l-1} + 1]},$$

que é continua nos pontos onde x é irracional e que é discontinua nos pontos onde x é racional.

II. Partindo da serie que vimos de empregar, podemos formar agora uma funcção totalmente discontinua em um intervallo finito. Com effeito, a somma da serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,[\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2}$$

é egual a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$, quando x é um numero irracional, e é infinita, quando x é racional, porque no primeiro caso a funcção $[\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2$ é egual a $+1$, e no segundo caso é nulla quando $n = p$ e $x = \frac{m}{p}$. Logo a funcção

$$f(x) = \frac{e - 1}{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!\,[\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)]^2}}$$

é egual a zero, quando x é racional, e é egual a $+1$, quando x é irracional; e portanto é totalmente discontinua em um intervallo qualquer.

152. *Exemplo de uma funcção continua que não tem derivada.* — Pelo methodo de Hankel podem formar-se funcções continuas com um numero infinito de pontos onde não têem derivada. Não entraremos porém aqui n'esta parte do methodo de condensação das singularidades, e limitar-nos-hemos a apresentar um exemplo [1] de uma funcção continua que não tem derivada em ponto algum, devido a Weierstrass, que trataremos pela mesma analyse que este eminente geometra (*Jornal de Crelle*, tom. 79). Esta funcção é a seguinte

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos a^n x\pi,$$

onde a, que representa um inteiro positivo impar, e b, que representa um numero positivo menor do que a unidade, devem ser escolhidos de modo que seja $ab > 1$ e $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$.

A serie que define $f(x)$ é uniformemente convergente, qualquer que seja o valor de x. Com effeito, por ser convergente a progressão Σb^n, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor m_1, tal que a desegualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

é satisfeita quando $m > m_1$. Logo a desegualdade

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos a^n x\pi \right| < \delta$$

é tambem satisfeita pelos mesmos valores de m, qualquer que seja x, e a serie é portanto uniformemente convergente.

D'este facto e de ser cada termo da serie uma funcção continua de x conclue-se (n.º 148) que a funcção $f(x)$ é continua.

Posto isto, vejamos como Weierstrass demonstra que esta funcção não tem derivada.

Represente x_0 um valor qualquer de x, m um numero inteiro positivo e α_m um numero inteiro tal que seja

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \leqq \frac{1}{2}.$$

---

(1) Vejam-se outros exemplos no importante trabalho de Darboux intitulado — *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris*, 1875).

A memoria célebre que Riemann consagrou á theoria das series trigonometricas inspirou uma grande parte dos exemplos das funcções sem derivada que têem sido dados.

Representando a differença $a^m x_0 - \alpha_m$ por x_{m+1} e pondo

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

vem

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

d'onde se conclue que x_0 está comprehendido entre x' e x'', e que se pode dar a m um valor tão grande que x' e x'' diffiram de x_0 tão pouco quanto se queira.

Por outra parte, temos

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^n \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{x' - x_0} \right) = \mathrm{A} + \mathrm{B},$$

pondo

$$\mathrm{A} = \sum_{n=0}^{m-1} \left(a^n b^n \cdot \frac{\cos a^n x' \pi - \cos a^n x_0 \pi}{a^n (x' - x_0)} \right),$$

$$\mathrm{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} x' \pi - \cos a^{m+n} x_0 \pi}{x' - x_0} \right).$$

Por ser

$$\frac{\cos (a^n x') \pi - \cos (a^n x_0) \pi}{a^n (x' - x_0)} = -\pi \operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \right) \pi \, \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \right) \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi},$$

$$\left| \operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) \right| < 1, \quad \left| \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \right) \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} \right| < 1,$$

temos ainda

$$|\mathrm{A}| < \pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n < \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m.$$

Como é

$$\cos a^{m+n} x' \pi = \cos a^n (\alpha_m - 1) \pi = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos a^{m+n} x_0 \pi = \cos (a^n \alpha_m + a^n x_{m+1}) \pi = (-1)^{\alpha_m} \cos a^n x_{m+1} \pi,$$

temos tambem

$$\mathrm{B} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \cos a^n x_{m+1} \pi}{1 + x_{m+1}} b^n;$$

e, por serem positivos todos os termos da somma Σ que entra no segundo membro d'esta

egualdade, e o primeiro termo não ser menor do que $\frac{2}{3}$ (visto que x_{m-1} está comprehendido entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$):

$$(-1)^{\alpha_m} B > \frac{2}{3}(ab)^m.$$

Logo

$$B = (-1)^{\alpha_m} \frac{2}{3} \eta_1 (ab)^m, \quad A = (-1)^{\alpha_m} \frac{\varepsilon\pi}{ab-1}(ab)^m,$$

onde η_1 representa um numero positivo, maior do que a unidade, e ε uma quantidade comprehendida entre $+1$ e -1.

Temos pois

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + \varepsilon \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta_1' \left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1 \frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Dando pois a a e b valores taes que seja $\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$, conclue-se das egualdades precedentes que as razões que entram nos seus primeiros membros, tendem para $+\infty$ e $-\infty$, quando m tende para o infinito e, portanto, quando x' e x'' tendem para x_0. Logo a funcção $f(x)$ não tem derivada em ponto algum x_0.

CAPITULO VIII

Funcções de variaveis imaginarias

I

Definições e principios geraes

153. Tendo de tratar agora das funcções de variaveis imaginarias, recordemos primeiramente que toda a variavel imaginaria $z = x + iy$ pode ser representada por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y; e, portanto, que podemos falar no ponto z, quando nos quizermos referir ao ponto (x, y).

Seja

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

uma funcção da variavel $z = x + iy$. Mudemos n'esta funcção x em $x + h$ e y em $y + k$ e supponhamos que a razão

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik}$$

tende para um limite determinado $f'(z)$, quando $h + ik$ tende de qualquer modo para zero, mesmo quando uma das quantidades h e k é nulla. Este limite chama-se, como no caso das variaveis reaes, *derivada de* $f(z)$.

Por ser o limite da razão precedente o mesmo, quando $f(z)$ tem derivada, quer h e k sejam differentes de zero, quer uma d'estas quantidades seja nulla, temos

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x + h, y) + i\psi(x + h, y) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{h} = f'(z),$$

$$\lim_{k=0} \frac{\varphi(x, y + k) + i\psi(x, y + k) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]}{ik} = f'(z).$$

e portanto

$$(a) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = i f'(z),$$

d'onde se deduz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right],$$

ou

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Temos assim duas condições a que devem satisfazer as funcções $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, para que $f(z)$ tenha derivada.

Accrescentaremos ainda que a primeira das equações (a) faz ver que, se $f'(z)$ for uma funcção continua de z, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ são funcções continuas de x e y.

A proposição reciproca da precedente é verdadeira. Se $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ representarem funcções continuas de x e y, as egualdades (n.º 68-2.º)

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + h \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \alpha_1 h + \alpha_2 k,$$

$$\psi(x+h, y+k) = \psi(x, y) + h \frac{\partial \psi}{\partial x} + k \frac{\partial \psi}{\partial y} + \beta_1 h + \beta_2 k,$$

onde α, α_1, β, β_1 representam quantidades infinitamente pequenas com h e k, dão, attendendo á fórmulas (1),

$$\varphi(x+h, y+k) + i\psi(x+h, y+k) - [\varphi(x, y) + i\psi(x, y)]$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)(h + ik) + (\alpha_1 + i\beta_1) h + (\alpha_2 + i\beta_2) k.$$

Temos pois, dividindo os dois membros d'esta egualdade por $h + ik$ e attendendo a que o primeiro membro da nova egualdade tende para $f'(z)$, quando $h + ik$ tende para zero,

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} + \lim \frac{(\alpha_1 + i\beta_1) h}{h + ik} + \lim \frac{(\alpha_2 + i\beta_2) k}{h + ik},$$

ou, attendendo a que α_1, α_2, β_1 e β_2 tendem para zero e a que os módulos de $\frac{h}{h + ik}$ e $\frac{k}{h + ik}$ são igferiores á unidade,

$$(2) \qquad f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Logo, se a funcção $f(z)$ satisfaz ás condições (1) e se $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ são funcções continuas de x e y, a funcção $f(z)$ tem derivada.

Accrescentaremos que esta fórmula determina a derivada e mostra que $f'(z)$ é uma funcção continua de z no caso considerado.

154. É facil de ver que o que se disse no n.º 61 a respeito da derivação das sommas, productos, quocientes e funcções de funcções tem ainda logar no caso das funcções de variaveis imaginarias. Estamos pois reduzidos a considerar as funcções simples.

1) É facil de ver que a derivada de $a \pm z$ é ± 1, e que a derivada de bz é b.

2) A derivada de e^z obtem-se applicando a fórmula (2) á funcção

$$u = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

que dá $u' = e^z$.

3) A derivada de cada ramo da funcção $\log z$ obtem-se applicando tambem a fórmula (2) á funcção

$$u = \log z = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

que dá $u' = \frac{1}{z}$, como no caso das variaveis reaes.

4) A derivada de z^m acha-se, pondo, como se fez no n.º 62, $z^m = e^{m \log z}$, e é egual a mz^{m-1}.

As outras funcções dependem das anteriores, e porisso acham-se facilmente as suas derivadas, e vê se que as regras dadas, para as formar no caso das variaveis reaes, subsistem no caso das variaveis imaginarias.

155. Se, entre cada grupo de dois pontos de uma região A do plano, onde estão representados os valores de z, se poder traçar uma linha continua que não corte o seu contorno, a região considerada diz-se uma *área continua*. Se em todos os pontos d'esta região $f(z)$ tem uma derivada, diz-se que $f(z)$ é *uma funcção monogenea* ou uma *funcção analytica de z na área* A. A área A póde abranger todo o plano, como acontece, por exemplo, no caso das funcções e^z, sen z, etc.

A funcção monogenea $f(z)$ diz-se *uniforme* na área A, quando a cada ponto z da área corresponde um unico valor da funcção [1].

---

[1] A theoria geral das funcções de variaveis imaginarias foi fundada principalmente por Cauchy, que consagrou a esta theoria muitos dos seus mais importantes trabalhos. Depois occuparam-se d'ella muitos geometras eminentes, á frente dos quaes estão Riemann e Weierstrass. Para a estudar têem sido empregados por alguns geometras methodos fundados na theoria das series, e por outros methodos pertencentes ao Calculo integral. Aqui vamos applicar os primeiros ao estudo de algumas questões relativas áquellas funcções; depois, em outro logar d'esta obra, faremos applicações dos segundos ao estudo de outras.

A respeito das definições precedentes faremos as observações seguintes:

1.ª Uma funcção monogenea em uma área A póde ser uma parte de outra funcção monogenea em uma área que contenha a primeira. Assim, por exemplo, a funcção definida pela serie

$$1+z+z^2+z^3+\ldots,$$

convergente quando é $|z|<1$, faz parte da funcção $\frac{1}{1-z}$, monogenea em todo o plano, excepto no ponto $z=1$.

Do mesmo modo, a funcção definida pela serie

$$f(z)=\mathrm{F}(z)-\frac{1}{z-a}+(z-a-1)\left[\frac{1}{(z-a)^2}+\frac{1}{(z-a)^3}+\ldots\right]$$

é egual a $\mathrm{F}(z)$, quando $|z-a)|>1$, e é egual ao infinito, quando $|z-a|<1$. Logo se $\mathrm{F}(z)$ representa uma funcção monogenea em todo o plano, $f(z)$ representa uma parte d'essa funcção monogenea.

2.ª Uma funcção de uma variavel imaginaria z póde ser monogenea só em parte da área em que é determinada. Tem, por exemplo, esta propriedade a funcção [1]

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n},$$

quando a, que representa um numero inteiro positivo impar, e b, que representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, satisfazem ás condições $ab>1$ e $\frac{2}{3}>\frac{\pi}{ab-1}$. Com effeito, a serie considerada é convergente quando é $|z|\overline{\overline{<}}1$. Em todos os pontos que satisfazem á condição $|z|<1$, a funcção tem uma derivada finita, como adiante veremos. Nos pontos que satisfazem á condição $|z|=1$, a funcção não tem derivada, visto que, substituindo a variavel z por $\cos\omega+i\operatorname{sen}\omega$, vem

$$f(z)=\sum_0^{\infty} b^n\left[\cos(a^n\omega)+i\operatorname{sen}(a^n\omega)\right],$$

e a funcção $\sum_0^{\infty} b^n\cos(a^n\omega)$ não tem derivada (n.º 152) relativamente a ω.

Accrescentaremos ainda que se vê, raciocinando como no n.º 148, que a funcção $f(z)$ é

---

[1] Weierstrass: — *Zur Functionenlehre* (*Monatsbericht der K. Akademie zu Berlin*, 1880).

Veja-se outro exemplo em um artigo que publicámos no tom XVII do *Bulletin des sciences mathématiques*, transcripto no tom. II das nossas *Obras sobre mathematica*.

continua mesmo na circumferencia do circulo de raio egual á unidade, e que portanto os valores que a funcção toma n'esta circumferencia dependem dos valores que toma no seu interior; porisso não existe funcção alguma monogenea em uma área continua, que contenha no seu interior o circulo considerado, a qual coincida com a precedente no interior d'este circulo, e a serie precedente representa portanto uma funcção analytica completa.

3.ª Quando a região do plano em que uma expressão analytica $f(z)$ é determinada, se compõe de muitas áreas separadas, $f(z)$ póde representar, n'estas differentes áreas, differentes funcções monogeneas completamente independentes. Esta observação importante foi demonstrada por Weierstrass da maneira seguinte.

Seja $\varphi(z)$ uma expressão egual a $+1$, quando $|z|<1$, e egual a -1, quando $|z|>1$. Pondo

$$F_0(z)=\frac{f_1(z)+f_2(z)}{2}, \quad F_1(z)=\frac{f_1(z)-f_2(z)}{2},$$

a expressão $F_0(z)+F_1(z)\varphi(z)$ é egual a $f_1(z)$, quando $|z|<1$, e é egual a $f_2(z)$, quando $|z|>1$.

Ha varias expressões analyticas que satisfazem ás condições impostas a $\varphi(z)$; aqui empregaremos a expressão (¹)

$$\varphi(z)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}(1-z)}{(1+z^{k-1})(1+z^k)}$$

considerada no n.º 150. Com effeito, vê-se por meio da analyse empregada no numero citado, que temos

$$\varphi(z)=\lim_{m=\infty}\frac{1-z^m}{1+z^m},$$

quer z seja real, quer seja imaginario; e d'esta egualdade resulta que $\varphi(z)=1$, quando $|z|<1$, e que $\varphi(z)=-1$, quando $|z|>1$.

Ha muitos outros modos de formar expressões analyticas que satisfazem ás condições do theorema enunciado. Aqui exporemos ainda um, devido a Lerch, professor na Universidade de Fribourg (²).

Sejam u_1 e u_2 duas funcções monogeneas independentes, e consideremos a fracção continua

$$f(z)=u_1+u_2-\cfrac{u_1u_2}{u_1+u_2-\cfrac{u_1u_2}{u_1+u_2-\dots}}$$

(¹) Esta expressão é reciproca de outra considerada pelos srs. Schröder e Tannery. Veja-se um artigo que a este respeito publiquei no *Bulletin des sciences mathématiques*, tom. XXII, transcripto no tom. II das *Obras sobre mathematica*.

(²) *Bulletin des sciences mathématiques*, 2.ª série, tom. X.

cujas convergentes c_{n+1} e c_n estão ligadas pela relação

$$c_{n+1} = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{c_n},$$

ou

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_n - u_1}{c_n - u_2},$$

d'onde resulta

$$\frac{c_n - u_1}{c_n - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2}, \quad \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-2} - u_1}{c_{n-2} - u_2}, \text{ etc.,}$$

e portanto

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+1} \cdot \frac{c_0 - u_1}{c_0 - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+2},$$

visto ser $c_0 = u_1 + u_2$.

D'esta egualdade conclue-se que é, para $n = \infty$, $\lim c_{n+1} = u_1$, se $|u_2| < |u_1|$, e $\lim c_{n+1} = u_2$, se $|u_2| > |u_1|$; isto é, que a expressão $f(z)$ representa u_1 na área onde é $|u_2| < |u_1|$, e que representa u_2 na área onde é $|u_2| > |u_1|$.

II

Extensão da fórmula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias

156. Seja $z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = \rho e^{i\omega}$ uma variavel complexa, que suppomos descrever, quando varía, uma recta que passa pela origem das coordenadas e faz um angulo ω com o eixo das abscissas, e seja

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(\rho e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

uma funcção d'esta variavel, que suppomos admittir derivadas finitas até á ordem n, para todos os valores que toma z, quando varía desde 0 até z. Teremos (n.º 113), desenvolvendo $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ pela formula de Maclaurin,

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(0) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{\rho^a}{a!} \left[\varphi^{(a)}(0) + i\psi^{(a)}(0)\right] + \mathrm{R}_n,$$

$$\mathrm{R}_n = \frac{\rho^n}{(n-1)!\, m} \left[(1-\theta_1)^{n-m} \varphi^{(n)}(\theta_1\rho) + i(1-\theta_2)^{n-m} \psi^{(n)}(\theta_2\rho)\right].$$

Temos porém, derivando $F(z)$ a vezes relativamente a ρ,

$$e^{a\omega i} F^{(a)}(z) = \varphi^{(a)}(\rho) + i\psi^{(a)}(\rho);$$

e, por ser

$$\theta_1 \rho e^{\omega i} = \theta_1 z, \quad \theta_2 \rho e^{\omega i} = \theta_2 z,$$

temos tambem

$$e^{n\omega i} F^{(n)}(\theta_1 z) = \varphi^{(n)}(\theta_1 \rho) + i\psi^{(n)}(\theta_1 \rho),$$

$$e^{n\omega i} F^{(n)}(\theta_2 z) = \varphi^{(n)}(\theta_2 \rho) + i\psi^{(n)}(\theta_2 \rho).$$

Logo [1]

$$(1) \qquad F(z) = F(0) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{z^a}{a!} F^{(a)}(0) + R_n,$$

$$R_n = \frac{(1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!\,m} R\,\{z^n F^{(n)}(\theta_1 z)\} + i \frac{(1-\theta_2)^{n-m}}{(n-1)!\,m} I\,\{z^n F^{(n)}(\theta_2 z)\}.$$

Pondo na expressão de R_n

$$z^n = Be^{bi}, \quad \frac{(1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!\,m} F^{(n)}(\theta_1 z) = Ce^{ci}, \quad \frac{(1-\theta_2)^{n-m}}{(n-1)!\,m} F^{(n)}(\theta_2 z) = De^{di},$$

póde dar se-lhe a fórma

$$R_n = BC \cos(b+c) + BDi \operatorname{sen}(b+d) = He^{hi},$$

onde

$$H^2 = B^2C^2 \cos^2(b+c) + B^2D^2 \operatorname{sen}^2(b+d).$$

Suppondo agora $C \geqq D$, temos $H^2 \leqq 2B^2C^2$ e portanto $H = \lambda BC\sqrt{2}$, onde λ representa um factor positivo, egual ou inferior á unidade.

Logo temos a fórmula

$$(2) \qquad R_n = \lambda\sqrt{2}\, e^{\alpha i} \frac{z^n (1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!\,m} F^{(n)}(\theta_1 z),$$

onde $\alpha = h - b - c$.

Se for $D > C$, demonstra-se esta fórmula do mesmo modo, pondo $H = \lambda BD\sqrt{2}$.

---

[1] Pelas notações $R\,\{A\}$ e $I\,\{A\}$ representam-se a parte real e o coefficiente de i em A.

Applicando as fórmulas (1) e (2) á funcção $f(z+z_0)$ e mudando no resultado z em $Z-z_0$, vem a fórmula

$$f(Z)=f(z_0)+(Z-z_0)f'(z_0)+\ldots+\frac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(z_0)+R_n,$$

$$R_n=\lambda\sqrt{2}\,e^{\varphi i}\frac{(Z-z_0)^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m}f^{(n)}[z_0+\theta(Z-z_0)],$$

que tem logar quando as funcções $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^{(n)}(z)$ são finitas para todos os valores que toma z, quando varía desde z_0 até Z, descrevendo a recta que une os pontos correspondentes.

A fórmula precedente é, como se vê, a *fórmula de Taylor*, que foi demonstrada primeiro no caso das variaveis reaes, e que foi estendida por Cauchy ao caso das variaveis imaginarias [1]. A expressão do resto R_n, que vimos de achar, é a expressão devida a Darboux [2], com a fórma que lhe deu Mansion [3].

157. *Desenvolvimento do binomio.* — Applicando a fórmula de Taylor á funcção $u=(1+z)^k$, onde suppomos k real, e considerando o ramo que dá $u=1$, quando $z=0$, vem, como no n.º 116,

$$(1+z)^k=1+\sum_{a=1}^{n-1}\binom{k}{a}z^a+R_n,$$

$$R_n=\lambda\sqrt{2}\,e^{\varphi i}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}z^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1}(1+\theta z)^{k-1}.$$

1) Se o módulo ρ de $z=\rho e^{i\omega}$ é menor do que a unidade, a quantidade

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}\rho^n$$

tende (n.º 116) para zero, quando n tende para o infinito. Além d'isso, temos

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right|=\frac{1-\theta}{\sqrt{1+\theta^2\rho^2+2\theta\rho\cos\omega}}\leqq\frac{1-\theta}{1-\theta\rho}<1.$$

---

[1] Podem ver-se os principaes methodos que têem sido empregados para demonstrar a fórmula de Taylor no caso das variaveis imaginarias no nosso trabalho *Sobre o desenvolvimento das funcções em serie*, já mencionado no n.º 113.

[2] *Journal de Liouville*, 3.ª serie, tom. II.

[3] *Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand*, 1887.

Logo R_n tende para 0, quando n tende para o infinito, e o binomio $(1+z)^k$ póde ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de z pela fórmula

$$(1+z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \binom{k}{a} z^a.$$

2) Se o módulo de z é maior do que a unidade, a serie precedente é divergente. Com effeito, o módulo do quociente de dois termos consecutivos d'esta serie tende para ρ, quando a tende para o infinito.

Para o estudo do caso em que o módulo de z é egual á unidade, assim como para o estudo do caso em que k é imaginario, póde consultar-se uma excellente memoria de Mansion publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tom. IX).

O estudo das condições de convergencia do desenvolvimento do binomio foi feito pela primeira vez de uma maneira completa por Abel em uma memoria admiravel, que consagrou a esta serie (*Oeuvres*, tom. I).

158. Appliquemos agora a fórmula que vimos de obter á deducção de algumas outras. A egualdade

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dá

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = e^{kiz} (1 - e^{-2iz})^k.$$

Se k é um numero inteiro positivo, vem

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} e^{(k-2a)iz}$$

$$= \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} [\cos(k-2a)z + i \operatorname{sen}(k-2a)z].$$

D'esta egualdade tira-se, se k é par, attendendo a que nos termos equidistantes dos extremos é egual a parte dependente do coseno, e egual, em valor absoluto, mas de signal contrario, a parte dependente do seno, e attendendo tambem a que existe um termo medio, correspondente a $a = \frac{1}{2}$, cujo valor é $\binom{k}{\frac{1}{2}k}$,

$$(-1)^{\frac{k}{2}} 2^k \operatorname{sen}^k z = 2 \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}k-1} (-1)^a \binom{k}{a} \cos(k-2a)z + \binom{k}{\frac{1}{2}k}.$$

*

Do mesmo modo se acham as fórmulas

$$(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}\, 2^k \operatorname{sen}^k z = 2 \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}(k-1)} (-1)^a \binom{k}{a} \operatorname{sen}(k-2a)z,$$

que tem logar quando k é impar,

$$2^k \cos^k z = 2 \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}k-1} \binom{k}{a} \cos(k-2a)z + \binom{k}{\frac{1}{2}k},$$

que tem logar quando k é par, e

$$2^k \cos^k z = 2 \sum_{a=0}^{\frac{1}{2}(k-1)} \binom{k}{a} \cos(k-2a)z,$$

que tem logar quando k é impar.

Estas fórmulas importantes dão os desenvolvimentos da potencia k de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ ordenados segundo os senos e os cosenos dos arcos multiplos de z. Foram dadas por Euler na *Introductio in Analysin infinitorum*.

159. *Desenvolvimento de e^z, $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$.* — Applicando a fórmula de Taylor á funcção e^z, vem

$$e^z = 1 + z + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda\sqrt{2}\, e^{\alpha}\, \frac{z^n}{n!} \cdot e^{z}.$$

Por $\frac{|z|^n}{n!}$ tender para zero, quando n tende para o infinito, esta fórmula mostra que a funcção e^z é sempre susceptivel de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z pela fórmula

$$e^z = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{z^a}{a!},$$

qualquer que seja o valor de z.

Por uma analyse semelhante se vê que as series achadas no n.º 121 para o seno e o coseno de uma variavel real ainda têem logar no caso das variaveis imaginarias.

160. *Desenvolvimento de* $\log(1+z)$. — Applicando a fórmula de Taylor a esta funcção, vem, como no caso das variaveis reaes,

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \ldots + (-1)^{n-2} \frac{z^{n-1}}{n-1} + \mathrm{R}_n,$$

$$\mathrm{R}_n = (-1)^{n-1} \lambda \sqrt{2}\, e^{\alpha} \cdot \frac{z^n}{1+\theta z} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1},$$

considerando sómente aquelle ramo de $\log(1+z)$ cujo valor inicial é egual a zero. É facil de ver, procedendo como no n.º 157, que, se o módulo de z é menor do que a unidade, temos o desenvolvimento em serie

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

e que, se o módulo de z é maior do que a unidade, esta serie é divergente.

161. Fazendo uma outra applicação da fórmula demonstrada no n.º 156, vamos estender, por meio d'ella, ás funcções de variaveis imaginarias a regra para formar as derivadas das funcções compostas. A demonstração d'esta regra dada no n.º 169 é sómente applicavel ás variaveis reaes.

Seja $y = f(u, v)$ uma funcção dada e supponhamos que as derivadas $f'_u(u, v)$, $f'_v(u, v)$ e $f''_{vv}(u, v)$ são finitas no ponto (u, v) e nos pontos visinhos, e que $f'_v(u, v)$ é continua, relativamente a u, no ponto considerado.

Temos

$$f(u+k, v+l) = f(u+k, v) + l f'_v(u+k, v) + \frac{1}{2} \lambda \sqrt{2}\, e^{\varphi i} l^2 f''_{vv}(u+k, v+\theta l),$$

quando se dão a k e l valores sufficientemente pequenos para se poder applicar a fórmula dada no n.º 156; e

$$f(u+k, v) = f(u, v) + k f'_u(u, v) + \alpha_1 k,$$

$$f'_v(u+k, v) = f'_v(u, v) + \alpha_2,$$

onde α_1 e α_2 são quantidades que tendem para zero, quando k tende para zero. Logo

$$f(u+k, v+l) - f(u, v) = k f'_u(u, v) + l f'_v(u, v)$$

$$+ \alpha_1 k + \alpha_2 l + \frac{1}{2} \lambda \sqrt{2}\, e^{\varphi i} l^2 f''_{vv}(u+k, v+\theta l).$$

Suppondo agora que u e v são funcções de z e que k e l são os valores dos augmentos que recebem u e v, quando se muda z em $z+h$, temos, devidindo ambos os membros d'esta equação por h e fazendo tender h para zero,

$$y' = \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v',$$

quando ao valor de z considerado corresponde um ponto (u, v) onde são satisfeitas as condições precedentemente enunciadas.

Do mesmo modo se considera o caso de a funcção dada depender de mais de duas funcções componentes.

162. O processo anterior para achar o desenvolvimento das funcções em serie é raras vezes applicavel por causa da complicação da expressão do resto R_n, que é necessario discutir, para saber se R_n tende para zero, quando n tende para o infinito. Recorre-se porisso n'este caso a um theorema célebre de Cauchy, que será demonstrado no *Calculo integral*, e ainda a um theorema importante, devido a Weierstrass, que aqui vamos demonstrar. Demonstraremos porém primeiramente o seguinte:

LEMMA. *Se a serie*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z = x + iy$$

for convergente em um circulo de raio dado, e se, em todos os pontos do interior d'este circulo que têem o mesmo módulo ρ, *o módulo de* $F(z)$ *for menor do que uma quantidade positiva* L, *o módulo de cada termo da serie não póde exceder* L.

Com effeito, multiplicando a serie proposta por z^{-m}, vem

$$z^{-m} F(z) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} + R,$$

R representando uma quantidade cujo módulo tende para zero, quando k tende para o infinito.

Mas, como por hypothese é $|z^{-m} F(z)| < L\rho^{-m}$, quando $|z| < \rho$, e como, por mais pequeno que seja o valor que se attribua a uma quantidade positiva δ, existe sempre um valor k_1 tal que é $|R| < \delta$, quando $k > k_1$, teremos (n.º 11–I)

$$|z^{-m} F(z) - R| < L\rho^{-m} + \delta,$$

ou

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c^n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

quando $|z| = \rho$.

Dando agora n'esta deseguadade a z os valores

$$\rho, \ \rho e^{i\theta}, \ \rho e^{2i\theta}, \ \ldots, \ \rho e^{(a-1)i\theta}$$

e a k um valor maior do que os differentes valores de k_1 correspondentes a estes valores de z, temos as desegualdades

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta$$

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)\theta i} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)\theta i} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

que dão, sommando e attendendo ao theorema I do n.º 11,

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} \left[1 + e^{(n-m)\theta i} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)\theta i} \right] + ac_m \right.$$

$$\left. + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} \left[1 + e^{(n-m)\theta i} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)\theta i} \right] \right| < a(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{(n-m)\theta i} + \ldots + e^{(a-1)(n-m)\theta i} = \frac{1 - e^{a(n-m)\theta i}}{1 - e^{(n-m)\theta i}} = A$$

e dando á quantidade θ um valor que não seja raiz da equação $1 - e^{(n-m)\theta i} = 0$, isto é, um valor tal que A seja finito,

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n A \rho^{n-m} + ac_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n A \rho^{n-m} \right| < a(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte da desegualdade precedente independente de c_m.

D'esta desegualdade tira-se

$$(a) \qquad\qquad |c_m| \overline{\leq} L\rho^{-m} + \delta;$$

porque, se fosse $|c_m| > L\rho^{-m} + \delta$, podia dar-se a a um valor tão grande que fosse

$$|c_m| - \left|\frac{B}{a}\right| > L\rho^{-m} + \delta$$

e, portanto,

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta,$$

visto ser (n.º 11-I)

$$\frac{|B|}{a} + \left| c_m + \frac{B}{a} \right| \geqq |c_m|.$$

163. Theorema. — *Se uma funcção $f(z)$ for susceptivel de ser desenvolvida na serie uniformemente convergente dentro de um circulo de raio R com o centro na origem das coordenadas:*

$$(1) \qquad f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) + \ldots,$$

e se as funcções $P_0(z)$, $P_1(z)$, etc. forem susceptiveis de ser desenvolvidas nas series ordenadas segundo as potencias de z, convergentes dentro do mesmo circulo:

$$(2) \qquad P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + A_2^{(n)} z^2 + \ldots + A_m^{(n)} z^m + \ldots,$$

a funcção $f(z)$ será tambem susceptivel de ser desenvolvida na serie ordenada segundo as potencias de z:

$$(3) \qquad f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m + \ldots,$$

e será

$$(4) \qquad A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} + \ldots$$

Este theorema foi demonstrado por Weierstrass da maneira seguinte [1].

Seja ρ uma quantidade positiva menor de R; por ser uniformemente convergente a serie (1) na circumferencia do raio ρ, a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valor n_1 de n, tal que a desegualdade

$$|P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \ldots + P_{n+p}(z)| < \delta$$

será satisfeita por todos os valores de n superiores a n_1 e por todos os valores de z que têem o módulo ρ, qualquer que seja p.

Mas temos (n.º 25)

$$P_{n+1}(z) + \ldots + P_{n+p}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^{(n+1)} + \ldots + A_m^{(n+p)}) z^m.$$

Logo, em virtude do lemma demonstrado no numero anterior, temos a desegualdade

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}| < \delta \rho^{-m},$$

d'onde se conclue a convergencia da serie (4).

---

[1] *Monatsberichte der Kön. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1880.

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja $R > \rho_1 > \rho$, podemos dar a n_1 um valor tal que seja tambem

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}| < \delta \rho_1^{-m},$$

por maior que seja p; e portanto

$$|\lim_{p=\infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)})| < \delta \rho_1^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} = A'_m,$$

$$\lim_{p=\infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)}) = A''_m,$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m, \quad |A''_m| < \delta \rho_1^{-m},$$

vem, para os valores de z cujo módulo ρ é inferior a ρ_1, a desegualdade

$$|A''_0| + |A''_1 z| + \ldots + |A''_m z^m| + \ldots < \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \ldots + \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^m + \ldots \right] < \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

da qual se conclue (n.º 23-2.º) que a serie

$$A''_0 + A''_1 z + \ldots + A''_m z^m + \ldots$$

é absolutamente convergente.

Por outra parte, é tambem absolutamente convergente (n.º 25) a serie

$$P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)}) z^m$$

$$= A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_m z^m + \ldots$$

Logo a serie

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

é absolutamente convergente.

Temos depois

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m + A''_m) z^m = \sum_{n=0}^{n} P_n(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m,$$

d'onde se tira

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m,$$

e portanto (n.º 11-I)

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| < \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

Como a δ se póde dar um valor tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desegualdade

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m,$$

isto é, a egualdade (3), que se queria demonstrar.

Exemplo 1.º Consideremos a funcção $f(z) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} z)$. Temos o desenvolvimento

$$f(z) = \operatorname{sen} z - \frac{\operatorname{sen}^3 z}{3!} + \frac{\operatorname{sen}^5 z}{5!} - \dots,$$

que é uniformemente convergente, qualquer que seja z (n.º 27). A funcção

$$\operatorname{sen}^n z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right)^n$$

póde ser desenvolvida (n.º 25) em serie ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z. Logo, em virtude do theorema precedente, tambem a funcção $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} z)$ póde ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z.

Exemplo 2.º Vê-se do mesmo modo que a funcção

$$f(z) = \operatorname{sen}[\log(z+1)]$$

póde ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z, quando o módulo de z é menor do que a unidade.

164. Applicando o theorema precedente ás series ordenadas segundo as potencias de $z - a$, sendo z variavel e a constante, deduz se, como vamos ver, o seguinte theorema:

Se a serie

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \tag{1}$$

fôr convergente no interior de um circulo de centro a *e raio* R, *isto é, quando* $|z-a|<R$, *e se* z_0 *representar um ponto do interior d'este circulo, as derivadas* $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, *etc. existem, e são finitas e respectivamente eguaes aos valores que tomam no ponto* z_0 *as sommas das derivadas de primeira ordem, de segunda ordem, etc. dos termos da serie proposta, isto é:*

$$f'(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_0-a)^{n-1},$$

$$f''(z_0)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z_0-a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Em segundo logar, se fôr $|z_0-a|+|z-z_0|<R$, *temos*

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+\ldots+\frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0)+\ldots$$

Com effeito, pondo na serie proposta $z=z_0+h$, teremos

$$f(z_0+h)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0+h-a)^n.$$

Esta serie, considerada como funcção de h, é uniformemente convergente quando é $|z_0+h-a|<R$, e, portanto (n.º 11-I), quando é $|z_0-a|+|h|<R$. Desenvolvendo depois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h, teremos, em virtude do theorema precedente,

$$f(z_0+h)=f(z_0)+hf_1(z_0)+h^2f_2(z_0)+\ldots,$$

onde

$$f_1(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_0-a)^{n-1},$$

$$f_2(z_0)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z_0-a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

Pondo agora $h=z-z_0$, vem

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f_1(z_0)+\ldots+(z-z_0)^n f_n(z_0)+\ldots,$$

com a condição $|z_0-a|+|z-z_0|<R$.

Para das fórmulas precedentes tirar o theorema enunciado, basta notar primeiramente que

*

a ultima dá $f_1(z_0)=f'(z_0)$, e que, portanto, a derivada da funcção definida pela serie

$$f(z_0)=c_0+c_1(z_0-a)+\dots+c_n(z_0-a)^n+\dots,$$

relativamente a z_0, é egual á somma das derivadas dos seus termos.

Applicando depois esta regra á funcção $f_1(z_0)$ e notando que os termos de $f_2(z_0)$ são eguaes ás derivadas dos termos correspondentes da serie que define $f_1(z_0)$, conclue-se que $f_2(z_0)=f'_1(z_0)=f''(z_0)$. Continuando do mesmo modo, vê-se que $f_3(z_0)=f'''(z_0)$, etc.

Corollario. *Se a serie* (1) *fôr convergente no interior do circulo de raio* R *e centro* a, *a funcção é continua dentro do mesmo circulo.*

Com effeito, em todos os pontos do interior d'este circulo $f(z)$ tem uma derivada finita.

165. A respeito da continuidade e das derivadas das series enunciaremos ainda os theoremas seguintes, que se demonstram do mesmo modo que os theoremas analogos relativos ás funcções de variaveis reaes (n.^{os} 148 e 149):

1.° *Se a serie* $f(x)=\Sigma f_n(x)$ *fôr uniformemente convergente em uma área dada, a funcção* $f(x)$ *é continua nos pontos d'esta área em que todas as funcções* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *etc. são continuas.*

2.° *Se a serie* $\Sigma f_n(z)$ *fôr convergente em uma área dada, e se na mesma área fôr uniformemente convergente a serie* $\Sigma f'_n(z)$, *formada com as derivadas dos termos da serie precedente, temos* $f'(z)=\Sigma f'_n(z)$ *na área considerada.*

166. Vimos no n.° 164 que, se a serie

$$(1) \qquad f(z)=c_0+c_1(z-a)+\dots+c_n(z-a)^{n-1}+\dots$$

fôr convergente no interior de um circulo de raio R, a serie

$$f'(z)=c_1+2c_2(z-a)+\dots+nc_n(z-a)^{n-1}+\dots$$

é convergente no interior do mesmo circulo. Vamos agora mostrar que o raio de convergencia d'esta segunda serie não póde ser superior ao da anterior.

Com effeito, se esta ultima serie fôr convergente quando $|z-a|=\rho$, existe um numero positivo B tal que temos

$$n\,|c_n|\,\rho^{n-1}<\text{B},$$

por maior que seja o valor que se dê a n, e, portanto, dando a n valores maiores do que ρ,

$$|c_n|\,\rho^n<\text{B}\,\frac{\rho}{n}<\text{B},$$

por onde se vê que a serie (1) tambem é convergente (n.° 27).

Resulta do que precede um methodo para desenvolver uma funcção em serie ordenada segundo as potencias de $x-a$, quando se conhece o desenvolvimento da sua derivada. Assim, se quizermos achar o desenvolvimento de $f(x)$ e fôr conhecido o desenvolvimento da sua derivada

$$f'(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots,$$

temos

$$f(z) = f(a) + a_0(z-a) + \ldots + a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Procuremos, por exemplo, o desenvolvimento da funcção $u = \text{arc sen}\, z$

Por ser (n.º 116).

$$u' = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} z^{2n} + \ldots,$$

onde o raio do circulo de convergencia é egual á unidade, temos o desenvolvimento, descoberto por Newton,

$$\text{arc cos}\, z = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

onde se considera o ramo da funcção que se reduz a 0, quando $z=0$, o qual tem o mesmo circulo de convergencia que o anterior.

I. Resulta do que precede e do que se disse no n.º 163 que a funcção $u = \cos k\,(\text{arc sen}\, z)$ póde ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de z, quando $|z| < 1$.

A expressão d'este desenvolvimento é notavel, e porisso vamos procural-a.

Temos primeiramente

$$(1-z^2)u'^2 = k^2(1-u^2),$$

e portanto

$$(1-z^2)u'' - zu' + k^2 u = 0.$$

Derivando agora n vezes esta equação (n.º 105-II), vem

$$(1-z^2)u^{(n+2)} - (2n+1)zu^{(n+1)} - (n^2-k^2)u^{(n)} = 0,$$

e portanto, pondo $z=0$,

$$u_0^{(n+2)} = (n^2 - k^2)u_0^{(n)}.$$

Como porém temos $u_0 = 1$, $u'_0 = 0$, deduz-se d'esta egualdade que $u_0^{(n)}$ é egual a zero, quando n é impar, e que, quando $n = 2m$,

$$u_0^{(2m)} = (-1)^m [k^2 - 2^2][k^2 - 4^2] \dots [k^2 - (2m-2)^2].$$

Temos pois a fórmula, dada por João Bernoulli,

$$\cos k (\text{arc sen}\, z) = 1 - \frac{k^2}{2!} z^2 + \frac{k^2 (k^2 - 2^2)}{4!} z^4 - \frac{k^2 (k^2 - 2^2)(k^2 - 4^2)}{6!} z^6 - \dots$$

Acha-se do mesmo modo a fórmula, devida a Newton,

$$\text{sen}\, k (\text{arc sen}\, z) = kz - \frac{k(k^2 - 1^2)}{3!} z^3 + \frac{k(k - 1^2)(k - 3^2)}{5!} z^5 - \dots$$

O primeiro d'estes desenvolvimentos tem um numero finito de termos quando k é par, e o segundo quando k é impar, e, nestes casos, z póde ter um valor qualquer. Nos outros casos a serie é divergente quando $|z| > 1$.

Existem outras fórmulas analogas, devidas a Euler e Lagrange, que se podem ver nos bellos capitulos que este eminente geometra consagrou ao desenvolvimento das funcções circulares nas suas *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques*.

III

Funcções regulares em uma região do plano

167. *Definição.* — Se a funcção $f(z)$, na visinhança do ponto z_0, fôr susceptivel de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, isto é, se existir um numero positivo R, tal que seja

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots,$$

quando $|z - z_0| < \text{R}$, diz-se que *a funcção $f(z)$ é regular no ponto z_0*.

É facil de ver que $(1+z)^k$, e^z, $\log(1+z)$, etc. são funcções regulares em todo o plano, exceptuando certos pontos isolados.

1) No caso do binomio $(1+z)^k$ temos

$$(1+z)^k = (1+z_0)^k \left[1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right]^k = (1+z_0)^k \Sigma \binom{k}{n} \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^n,$$

quando $|z - z_0| < |1 + z_0|$; e portanto esta funcção é regular em todo o plano, exceptuando-se o ponto $z_0 = -1$ quando k não é inteiro e positivo.

2) Do desenvolvimento

$$e^z = e^{z - z_0} \cdot e^{z_0} = e^{z_0} \left[1 + z - z_0 + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} + \ldots \right]$$

conclue-se que a funcção e^z é regular em todo o plano.

3) Da egualdade

$$\log(1 + z) = \log(1 + z_0) + \log\left(1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right) = \log(1 + z_0) + \frac{z - z_0}{1 + z_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^2 + \ldots,$$

que tem logar quando é $|z - z_0| < |1 + z_0|$, conclue-se que $\log(1 + z)$ é uma funcção regular em todo o plano, excepto no ponto $z_0 = -1$.

4) Do mesmo modo se mostra que $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são funcções regulares em todo o plano.

168. THEOREMA 1.º *Se uma funcção uniforme, regular em todos os pontos de uma área continua* A, *fôr constante em todos os pontos de uma linha finita, contida na área* A, *é constante em toda a área.*

Representando, com effeito, por a o valor de z correspondente a um ponto qualquer da linha dada, teremos, para todos os valores de z representados pelos pontos de um circulo de centro a e raio R,

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$$

ou (n.º 164)

$$f(z) = f(a) + (z - a) f'(a) + \ldots + \frac{(z - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

Mas, por ser constante a funcção $f(z)$ em todos os pontos da linha dada, temos $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, etc. Logo será $f(z) = f(a)$ em todo o circulo considerado.

Tomando em seguida um ponto b do circulo anterior e repetindo o raciocinio precedente, demonstra-se do mesmo modo que $f(z) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um segundo circulo, que é em parte distincto do anterior. Tomando um ponto c d'este circulo acha-se do mesmo modo $f(z) = f(c) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um terceiro circulo. Continuando do mesmo modo até ao contorno da área A, demonstra-se completamente o theorema.

THEOREMA 2.º *Se duas funcções uniformes, regulares em todos os pontos de uma área continua* A, *fôrem eguaes em todos os pontos de uma linha finita, contida na área* A, *são eguaes em toda a área.*

Este theorema é consequencia immediata do anterior, pois que a differença das duas funcções sendo nulla em todos os pontos da linha dada, será nulla em toda a área A.

THEOREMA 3.º *Se uma funcção uniforme, regular no ponto* a, *se annulla assim como as suas derivadas até á ordem* $m-1$, *quando é* $z=a$, *teremos*

$$f(z)=(z-a)^m \varphi(z),$$

onde $\varphi(z)$ *é uma funcção uniforme regular na visinhança do ponto* a.

Com effeito, sendo por hypothese

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\ldots+c_n(z-a)^n+\ldots$$

e $c_0=f(a)$, $c_1=f'(a)$, etc., temos

$$f(z)=(z-a)^m\left[\frac{1}{m!}f^{(m)}(a)+\frac{z-a}{(m+1)!}f^{(m+1)}(a)+\ldots\right],$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

THEOREMA 4.º *Os pontos em que uma funcção uniforme, regular em uma área* A, *tem um mesmo valor, estão separados por intervallos finitos, se a funcção não é constante.*

Com effeito, por não ser constante a funcção $f(z)$ na área A, as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, etc. não podem ser todas eguaes a zero. Suppondo pois que $f^{(m)}(a)$ é a primeira derivada que não é nulla, temos

$$f(z)-f(a)=(z-a)^m\left[\frac{1}{m!}f^{(m)}(a)+\frac{z-a}{(m+1)!}f^{(m+1)}(a)+\ldots\right].$$

Mas é sempre possivel dar a δ um valor tão pequeno, que o módulo do primeiro termo d'esta differença seja maior que o módulo da somma dos seguintes, quando $|z-a| \leqq \delta$. Logo no circulo de centro a e raio δ a differença $f(z)-f(a)$ não póde ser nulla em ponto algum differente de a.

THEOREMA 5.º *A somma de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área* A, *é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Este theorema é uma consequencia immediata do theorema 4.º do n.º 25. Com effeito, chamando $f(z)$ e $F(z)$ as duas expressões dadas e a um ponto da área A, temos

$$f(z)=\Sigma c_n(z-a)^n,\quad F(z)=\Sigma C_n(z-a)^n,$$

e portanto

$$f(z) + F(z) = \Sigma (c_n + C_n)(z-a)^n.$$

THEOREMA 6.º *O producto de duas expressões uniformes, regulares em todos os pontos da área* A, *é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior, partindo do theorema 5.º do n.º 25.

THEOREMA 7.º *O quociente de duas expressões* $\varphi(z)$ *e* $\psi(z)$, *uniformes e regulares na área* A, *é regular nos pontos da mesma área em que o denominador* $\psi(z)$ *não é nullo.*

Com effeito, pondo

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots,$$

onde c_0 é differente de zero, teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \left[1 + \frac{(z-a)[c_1 + c_2(z-a) + \ldots]}{c_0} \right]^{-1} = c_0 [1 + P(z-a)]^{-1},$$

pondo

$$\frac{(z-a)[c_1 + c_2(z-a) + \ldots]}{c_0} = P(z-a).$$

Dando a $|z-a|$ um valor tão pequeno que seja $|P(z-a)| < 1$, podemos desenvolver $[\psi(z)]^{-1}$ em serie ordenada segundo as potencias de $z-a$, e teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \{ 1 - P(z-a) + [P(z-a)]^2 - [P(z-a)]^3 + \ldots \}.$$

Esta serie é uniformemente convergente na visinhança do ponto a, assim como (n.º 25) as series que resultam de $P(z-a)$, $[P(z-a)]^2$, etc.; logo (n.º 163) a funcção $[\psi(z)]^{-1}$ é susceptivel de ser desenvolvida em serie ordenada segundo as potencias de $z-a$ na visinhança do ponto a. Esta funcção é pois regular no ponto a, assim como, em virtude do theorema anterior, a funcção $\varphi(x)[\psi(x)]^{-1}$.

ss

IV

Funcções regulares em todo o plano

169. A toda a funcção uniforme $f(z)$, regular em todos os pontos do plano, chama-se *funcção inteira* ou *holomorpha.* Taes são, entre as funcções algebricas, os polynomios racionaes inteiros relativamente a z, e, entre as funcções transcendentes, as funcções e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ e, em geral (n.º 164), as funcções que podem ser desenvolvidas em serie ordenada segundo as potencias inteiras positivas de z:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

qualquer que seja z.

A theoria das funcções transcendentes inteiras é a continuação natural da theoria das funcções racionaes inteiras, estudada na Algebra, e as suas propriedades são, em parte, analogas ás propriedades d'estas. São tambem susceptiveis de se exprimir por um producto de factores, que tornam explicitas as raizes da funcção. Este resultado importante, demonstrado primeiro por Euler, Cauchy, Gauss, etc., em alguns casos particulares, foi completamente estabelecido por Weierstrass [1]. Antes porém de expôr o bello theorema devido ao eminente geometra de Berlin, vamos considerar as duas funcções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, cuja decomposição em factores, devida a Euler, se obtem por considerações simples.

170. *Decomposição do seno e do coseno em factores.* — Da expressão de $\operatorname{sen} kz$ dada no n.º 52 tira-se, quando k é impar, pondo $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$,

$$\operatorname{sen} kz = f(\operatorname{sen} z),$$

onde f representa uma funcção inteira do grau k. Os k valores de $\operatorname{sen} z$ que annullam esta funcção, devem corresponder aos valores de z que satisfazem á equação $\operatorname{sen} kz = 0$ e que dão para $\operatorname{sen} z$ valores distinctos, isto é, aos valores de z seguintes:

$$0,\ \pm\frac{\pi}{k},\ \pm\frac{2\pi}{k},\ \ldots,\ \pm\frac{\frac{1}{2}(k-1)\pi}{k}.$$

---

[1] Weierstrass: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen* (*Abhandlungen der K. Akademie zu Berlin,* 1876).

Logo temos

$$\operatorname{sen} kz = A \operatorname{sen} z \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{2k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right),$$

onde A é uma constante, que vamos determinar. Para isso, dividam-se os dois membros da egualdade precedente por kz e faça-se depois tender z para zero. O primeiro membro tendendo para a unidade e o segundo para $\frac{A}{k}$, teremos $A = k$.

Mudando na egualdade precedente z em $\frac{\pi z}{k}$, temos

$$\operatorname{sen} \pi z = k \operatorname{sen} \frac{\pi z}{k} \left\{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{2k}}\right\} \cdots \left\{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right\}.$$

Vamos agora procurar o limite para que tende o segundo membro d'esta egualdade, quando k tende para o infinito.

Por ser

$$\lim_{k=\infty} k \operatorname{sen} \frac{\pi z}{k} = \pi z, \quad \lim_{k=\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} = \frac{z^2}{n^2},$$

temos

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{(m-1)^2}\right) \lim_{k=\infty} R_m,$$

$$R_m = \prod_{n=m}^{\frac{1}{2}(k-1)} \left\{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}}\right\}.$$

Por ser (em virtude do que se disse nos n.os 121 e 159, e em virtude de ser $\frac{1}{2}(k-1)$ o maior valor que póde ter n)

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} - \frac{\left(\frac{n\pi}{k}\right)^3}{3!} \cos \theta \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k}\left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24}\right),$$

*

onde θ_n representa uma quantidade inferior á unidade em valor absoluto; e por ser

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k} = \frac{\pi^2 z^2}{k^2}(1 - \varepsilon)^2,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena, quando k é infinitamente grande, temos tambem

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} = 1 - \frac{z^2(1-\varepsilon)^2}{n^2\left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24}\right)^2} = 1 + \frac{u_n}{n^2},$$

onde u_n representa uma quantidade cujo módulo não póde ser infinito, qualquer que seja n. Logo

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \cdot \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right).$$

Por outra parte, chamando L um numero maior do que as quantidades u_1, u_2, etc., a serie $\sum_1^\infty \frac{u_n}{n^2}$ é convergente, visto que os seus termos são menores do que os termos correspondentes da serie (n.º 20) $\sum_1^\infty \frac{\mathrm{L}}{n^2}$; portanto é tambem convergente o producto infinito $\prod_1^\infty \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)$. e temos

$$\lim_{m=\infty} \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right) = \frac{\prod_1^\infty \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)}{\lim\limits_{m=\infty} \prod\limits_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)} = 1.$$

Vem pois a fórmula d'Euler

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{a}$$

Do mesmo modo se decompõe $\cos \pi z$ em factores, o que dá

$$\cos \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

171. Theorema de Weierstrass. — *Sendo dada a serie de quantidades* 0, a_1, a_2, a_3, ..., a_i ..., *collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição* $\lim |a_i| = \infty$, *póde construir-se uma funcção transcendente inteira pela fórmula*

$$f(z) = z^{\alpha} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)^{n_i} e^{n_i \mathrm{S}_i}, \quad \mathrm{S}_i = \sum_{k=1}^{m_i} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_i}\right)^k, \tag{1}$$

cujas raizes são $0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_c,\ \ldots,$ *e cujos respectivos graus de multiplicidade são* $n_0,\ n_1,\ \ldots,\ n_c,\ \ldots$.

Reciprocamente, se $f_1(z)$ *representar uma funcção inteira cujas raizes sejam* $0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_c,\ \ldots,$ *e os respectivos graus de multiplicidade* $n_0,\ n_1,\ \ldots,$ *esta funcção póde ser decomposta em factores, que tornam explicitas estas raizes, por meio da fórmula*

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c}, \tag{2}$$

onde $\varphi(z)$ *representa uma funcção inteira.*

A demonstração que aqui vamos dar d'este importante theorema é devida a Mittag-Leffler, professor na Universidade de Stockholm (1).

Da serie (n.° 160),

$$\log\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = -n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

que tem logar quando é $\frac{z}{a_c} < 1$, deduz-se

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{-n_c S_c(1,\ \infty)} \tag{A}$$

pondo, para brevidade,

$$S_c(u,\ \nu) = \sum_{k=u}^{\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k.$$

Logo temos

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1,\ m_c)} = e^{-n_c S_c(m_c + 1,\ \infty)}, \tag{B}$$

onde m_c representa um numero inteiro positivo ou zero, devendo n'este ultimo caso considerar-se $e^{n_c S_c(1,\ m_c)}$ como representando a unidade.

Considere-se agora uma serie de quantidades positivas $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_c,\ \ldots,$ taes que a serie $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valor tão grande que seja

$$|n_c S_c(m_c + 1,\ \infty)| < \varepsilon_c, \tag{C}$$

qualquer que seja o valor que se dê a z, o qual satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, ε represen-

(1) *Acta Mathematica*, tom. IV.

tando uma quantidade positiva arbitrariamente dada; o que é sempre possivel, por ser n'este caso uniformente convergente a serie $S_c(1, \infty)$. O producto ΠE_c, onde

$$\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1,\ m_c)} = E_c,$$

representa uma funcção regular em todos os pontos do plano e que se annulla nos pontos a_1, a_2 ..., a_c, ..., como vamos ver.

Consideremos para isso um ponto qualquer z_0 do plano e os pontos visinhos d'este, isto é, os pontos que satisfazem á condição $|z-z_0| \overline{\overline{<}} \rho$, onde ρ é uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Por ser $\lim\limits_{c=\infty} a_c = \infty$, é sempre possivel dar a c_1 um valor tão grande que a desegualdade $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$ seja satisfeita por todos os valores de c maiores do que c_1, e por todos os valores de z que satisfaçam á condição $|z-z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Por outra parte, por ser convergente a serie $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_c$, é sempre possivel dar a c_2 um valor tão grande que, dando a δ um valor tão pequeno quanto se queira, a desegualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de c superiores a c_2, qualquer que seja p.

Logo as duas desegualdades precedentes são satisfeitas ao mesmo tempo pelos valores de c maiores do que a maior das quantidades c_1 e c_2, na região do plano determinada pela condição $|z-z_0| \overline{\overline{<}} \rho$,

Das desegualdades precedentes e da desegualdade (C) conclue-se que a desegualdade

$$\text{(D)} \qquad \sum_{t=c}^{c+p} \left| n_t S_t(m_t+1,\ \infty), \right| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de c superiores a c_1 e c_2, na região do plano determinada pela condição $|z-z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Por outra parte, a fórmula (B) dá

$$\prod_{t=c}^{c+p} E_t = e^{-\sum\limits_{t=c}^{c+p} n_t S_t(m_t+1,\ \infty)},$$

d'onde se tira

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log E_t = -\sum_{i=c}^{c+p} n_t S\,(m_t+1,\ \infty),$$

e, em virtude da desegualdade (D),

$$\left| \sum_{t}^{c+p} \log E_t \right| < \delta.$$

Logo a serie $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \log E_t$ é uniformemente convergente na região considerada do plano.

Posto isto, supponhamos primeiramente que z_0 é differente de a_1, a_2, etc. e que a ρ se dá um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < |z_0 - a_c|$, qualquer que seja c. O segundo membro da egualdade

$$\log E_c = n_c \log\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

$$= n_c \log\left(1 - \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right) + n \log\left(1 - \frac{z_0}{a_c}\right)$$

$$+ n \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c}\right)^k$$

é susceptivel de ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, e temos [1] $\log E_c = P(z - z_0)$; e portanto, applicando o theorema do n.º 163,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log E_c = P_1(z - z_0),$$

d'onde se tira

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1(z - z_0)}.$$

D'esta fórmula tira-se depois

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \ldots + \frac{P_1^n(z - z_0)}{n!} + \ldots$$

ou (n.º 163)

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = P_2(z - z_0),$$

o que prova que a funcção $\prod\limits_{1}^{\infty} E_c$ é regular no ponto z_0, como se queria demonstrar.

Supponhamos agora que z_0 representa uma raiz a_j da funcção considerada. Dando n'este

---

[1] Empregaremos, como Weierstrass, as notações $P(z - z_0)$, $P_1(z - z_0)$, etc. para representar series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - z_0$.

caso a ρ um valor tão pequeno que na área plana determinada pela condição $|z - a_j| \overline{\overline{<}} \rho$ não exista outra raiz da mesma funcção, teremos

$$\frac{\prod_1^\infty E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{n_j}} = e^{P_3(z - a_j)}$$

visto que o primeiro membro não tem a raiz a_j e por isso lhe é applicavel o que vem de dizer-se; e portanto

$$\prod_1^\infty E_c = \frac{(-1)^{n_j}}{a_j} (z - a_j)^{n_j} e^{P_2(z - a_j)},$$

d'onde se conclue, como no caso anterior, que a funcção $\prod_1^\infty E_c$ é regular no ponto a_j.

As raizes a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar, são todas differentes de zero. Para que a funcção tenha tambem a raiz 0, basta multiplicar $\prod_1^\infty E_c$ por z^{n_0}. Com effeito, temos (n.º 25)

$$z^{n_0} \prod_1^\infty E_c = (z_0 + z - z_0)^{n_0} P_2(z - z_0) = P_1(z - z_0),$$

e portanto a nova funcção que se obtem é ainda regular em todo o plano.

De tudo o que precede conclue-se a primeira parte do theorema de Weierstrass, isto é, que se póde construir pela fórmula (1) uma funcção que é regular em todo o plano e que se annulla nos pontos 0, a_1, a_2, etc.

Para demonstrar a segunda parte d'este theorema, basta notar que o quociente da funcção $f_1(z)$ dada pela funcção $f(z)$, que vimos de formar, não póde ser nullo nem infinito em ponto algum do plano. Logo este quociente representa (n.º 168-7.º) uma funcção $F(z)$ regular em todo o plano, que não se annulla em ponto algum.

Por ser, na visinhança do ponto z_0,

$$F(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

onde b_0 é differente de zero, teremos

$$\log F(z) = \log b_0 + \log\left[1 + \frac{(z - z_0)[b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots]}{b_0}\right].$$

Logo, se a $|z - z_0|$ se derem valores tão pequenos que seja

$$\left|\frac{(z - z_0)[b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots]}{b_0}\right| < 1,$$

teremos, em virtude do theorema do n.º 163,

$$\log F(z) = P(z - z_0),$$

e portanto a funcção $\log F(z)$ é inteira. Temos pois, representando por $\varphi(z)$ esta funcção, $F(z) = e^{\varphi(z)}$, e portanto

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} \cdot f(z),$$

que é o que se queria demonstrar.

172. *Determinação dos factores primarios das funcções inteiras.* A cada um dos factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) e^{n_c S_c}$$

que entram nas fórmulas (1) e (2), chamou Weierstrass um *factor primario* das funcções consideradas $f(z)$ e $f_1(z)$. Tanto para decompôr uma funcção inteira dada em factores primarios, como para achar uma funcção inteira que tenha raizes dadas, é necessario conhecer, para cada valor de c, um valor de m_c que satisfaça á desegualdade (C), e para isso basta, como vamos ver, dar a m_c valores taes que seja convergente a serie

$$\text{(E)} \qquad \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|.$$

Com effeito, se esta serie é convergente, podemos dar a ε_c o valor

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|,$$

chamando λ uma quantidade independente de z e de c.

Mas, por ser

$$n_c \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

e

$$\sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|}$$

TT

a desegualdade (C) póde ser substituida pela seguinte:

$$\left|\frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}}\right| \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|} < \varepsilon_c,$$

que é satisfeita, visto que se póde dar a λ o valor maximo $\frac{1}{1-\varepsilon}$ que toma $\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|}$ quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

Se houver pois um valor de m_c, constante qualquer que seja c, tal que a serie (E) seja convergente, emprega-se este valor em todos os termos das fórmulas (1) ou (2). No caso contrario, põe-se $m_c = c$; com effeito, a serie (E) transforma-se então na serie $\sum_{c=1}^{\infty}\left|\frac{n_c z^{c+1}}{a_c^{c+1}}\right|$, que é convergente (n.º 22–IV), visto que a raiz $\sqrt[c]{n_c}\left|\frac{z}{a_c}\right|^{\frac{c+1}{c}}$ tende para zero, quando c tende para o infinito, suppondo que n_c não tende ao mesmo tempo para o infinito.

Exemplo. Procuremos a fórma geral das funcções inteiras cujas raizes são 0, 1, -1, 2, -2, ..., c, $-c$, etc.

Como a serie $\sum_{c=1}^{\infty}\left|\frac{z^2}{a_c^2}\right| = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{c^2}$ é convergente, qualquer que seja z (n.º 20), podemos pôr $m_c = 1$, e temos

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{c}\right)e^{\frac{z}{c}}\left(1+\frac{z}{c}\right)e^{-\frac{z}{c}}\right],$$

ou

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira de z.

Faz parte das funcções comprehendidas na fórma precedente a funcção sen πz. N'este caso é $e^{\varphi(z)} = \pi$ (n.º 170).

173. Fundados no que precede, podemos achar um desenvolvimento em serie da funcção $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$, em que se tornam explicitos os pontos onde esta funcção é infinita.

Derivando os logarithmos dos dois membros da fórmula (2), vem (n.º 165)

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty}\left[\frac{n_c}{z-a_c} + \sum_{k=1}^{m_c}\frac{n_c}{a_c}\left(\frac{z}{a_c}\right)^{k-1}\right]$$

ou

$$\text{(F)} \qquad \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t}(z-a_t)},$$

visto ser

$$\frac{1}{z-a_t} = -\frac{1}{a_t}\left[1 + \frac{z}{a_t} + \ldots + \left(\frac{z}{a_t}\right)^{m_t-1}\right] + \frac{z^{m_t}}{a_t^{m_t}(z-a_t)}.$$

Para completar a demonstração d'esta fórmula (F), vamos mostrar que a serie que entra no seu segundo membro é uniformemente convergente, quando a serie (E) o é tambem. Com effeito, por esta serie ser uniformente convergente e por $|a_t|$ tender para o infinito com t, a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valor t_1, tal que as desegualdades

$$\lambda \sum_{t}^{t+p} \left|\frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}}\right| < \delta, \quad \left|\frac{z}{a_t}\right| < \varepsilon$$

serão satisfeitas quando $t > t_1$ e $|z| < \rho$, ρ representando uma quantidade tão grande quanto se queira. Logo teremos tambem

$$\sum_{t}^{t+p} \left|\frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}}\right| \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_t}\right|} < \delta,$$

visto que se póde dar a λ o valor $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$; depois

$$\sum_{t}^{t+p} \left|\frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}}\right| \frac{1}{\left|1-\frac{z}{a_t}\right|} < \delta;$$

e finalmente

$$\sum_{t}^{t+p} \left|\frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t}(z-a_t)}\right| < \delta;$$

d'onde se conclue que a serie que entra no segundo membro de (F) é uniformemente convergente em qualquer área, por maior que ella seja.

174. *Caso em que m_t é constante.* — No caso de m_t ser constante, a funcção (2) tem pro-

priedades notaveis, que fôram estudadas por Laguerre, Cesàro, etc. Aqui limitar-nos-hemos a demonstrar, no caso de $\varphi(z)$ ser constante e $n_0 = 0$, o theorema seguinte:

Se todas as raizes de $f_1(z) = 0$ são reaes, tambem as raizes de $f_1'(z) = 0$ o são.

Este theorema foi demonstrado por F. Chio nos casos de ser $m_c = 0$ e $m_c = 1$, e em seguida por Cesàro no caso de m_c representar uma constante qualquer (1).

Seja $z_1 = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ uma qualquer das raizes da equação $f_1'(z) = 0$. Substituindo este valor em logar de z na egualdade (F) e pondo $m_c = m$, vem

$$\sum_{c=1}^{\nu} \left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \cdot \frac{n_c(\cos m\omega - i \operatorname{sen} m\omega)}{\rho\cos\omega - a_c + i\rho\operatorname{sen}\omega} = 0.$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes, das quaes uma determina ρ e a outra ω:

$$\sum_{c=1}^{\nu} \frac{n_c}{d_c}\left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \{\rho\cos(m-1)\omega - a_c\cos m\omega\} = 0,$$

$$\sum_{c=1}^{\nu} \frac{n_c}{d_c}\left(\frac{\rho}{a_c}\right)^m \{\rho\operatorname{sen}(m-1)\omega - a_c\operatorname{sen} m\omega\} = 0,$$

pondo $d_c = (\rho\cos\omega - a_c)^2 + \rho^2\operatorname{sen}^2\omega$.

Se m é impar, multiplicando a primeira d'estas egualdades por sen $(m-1)\,\omega$, a segunda por $\cos(m-1)\,\omega$ e subtrahindo membro a membro as egualdades resultantes, vem

$$\operatorname{sen}\omega \sum_{c=1}^{\nu} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m-1}} = 0,$$

d'onde se tira $\omega = 0$.

Se m é par, multiplicando a primeira equação por $\operatorname{sen} m\omega$, a segunda por $\cos m\omega$ e subtrahindo, vem

$$\operatorname{sen}\omega \sum_{c=1}^{\nu} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m}} = 0,$$

d'onde se tira tambem $\omega = 0$.

Logo, em qualquer dos casos, será $z_1 = \rho$. As raizes de $f_1'(z) = 0$ são portanto reaes, que é o que se queria demonstrar.

---

(1) *Giornale di Matematiche*, tom. XXII.

V

Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados

175. Das funcções uniformes não inteiras, limitar-nos-hemos a estudar as que são regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_c, \ldots$, taes que seja $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, e na visinhança dos quaes tenhamos

$$(1) \qquad f(z) = \mathrm{P}(z - a_c) + \mathrm{G}_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right),$$

onde

$$(2) \qquad \mathrm{G}_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} \mathrm{A}_t \left(\frac{1}{z - a_c}\right)^t.$$

Estes pontos são os *pontos singulares* da funcção, e fôram chamados por Weierstrass *pólos*, quando m é finito, *pontos singulares essenciaes*, quando m é infinito.

As funcções consideradas resultam naturalmente da generalização da theoria das funcções racionaes. Na verdade, toda a funcção racional $f(z)$ é susceptivel da decomposição (n.º 42)

$$f(z) = \sum \frac{\mathrm{A}_a}{(z - a_1)^a} + \sum \frac{\mathrm{B}_b}{(z - a_2)^b} + \ldots;$$

se agora z_0 representar um ponto differente de a_1, a_2, etc., temos

$$f(z) = \sum \frac{\mathrm{A}_a}{(z_0 - a_1)^a} \left(1 - \frac{z - z_0}{z_0 - a_1}\right)^{-a} + \ldots,$$

d'onde resulta (n.ºs 25 e 157)

$$f(z) = \mathrm{P}(z - z_0),$$

e a funcção é portanto regular na visinhança de z_0; se porém z_0 representa um dos pontos a_1, a_2, etc., a_1 por exemplo, applicando a decomposição anterior só ás parcellas correspondentes a a_2, a_3, etc., vem um resultado da fórma

$$f(z) = \sum \frac{\mathrm{A}_a}{(z - a_1)^a} + \mathrm{P}_1(z - a_1),$$

e o ponto a_1 é portanto um pólo.

Pertencem tambem ao grupo de funcções que estamos considerando, as funcções $f_1(z)$ que são o quociente de duas funcções transcendentes inteiras $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$. Com effeito, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ as raizes do denominador e $n_1, n_2, \ldots, n_c, \ldots$ os seus respectivos graus de multiplicidade, a funcção $f_1(z)$ será regular em qualquer ponto z_0 do plano, differente dos pontos a_1, a_2, etc. (n.º 168–7.º); e, na visinhança do ponto a_c, teremos (n.º 171)

$$f_1(z) = \frac{P(z-a_c)}{(z-a_c)^{n_c} e^{P_1(z-a_c)}} = \frac{P_2(z-a_c)}{(z-a_c)^{n_c}} = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_3(z-a_c).$$

Logo a funcção considerada é regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, que são pólos.

176. Assim como acontece com as funcções racionaes, as funcções que estamos estudando são susceptiveis de uma decomposição que torna explicitos os seus pólos e os seus pontos singulares essenciaes. Esta importante propriedade, estabelecida por Weierstrass no caso de ser finito o numero de pontos singulares da funcção, foi em seguida estendida por Mittag-Leffler ao caso de a funcção conter um numero infinito de pólos ou pontos singulares essenciaes. Antes porém de demonstrar o bello e importante theorema devido ao sabio professor da Universidade de Stockholmo, vamos considerar o caso das funcções $\cot z$, $\tang z$, $\sec z$ e $\operatorname{cosec} z$, cuja decomposição em funcções simples, dada por Euler na sua *Introductio in Analysin infinitorum*, se obtem de um modo muito facil e dá origem a algumas fórmulas importantes.

A fórmula (a) do n.º 170 dá

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{c^2\pi^2}\right),$$

e, derivando relativamente a z,

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2\pi^2},$$

ou

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi}\right).$$

Esta fórmula dá a decomposição de $\cot z$ em fracções simples, que tornam explicitos os pólos 0, $c\pi$, $-c\pi$ da funcção.

Do que precede tiram-se as seguintes consequencias.

I. Desenvolvendo o binomio que entra no segundo membro da penultima fórmula, vem

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2\pi^2} + \frac{z^2}{c^4\pi^4} + \frac{z^4}{c^6\pi^6} + \ldots\right),$$

quando é (n.º 157) $|z| < \pi$; e portanto, em virtude do theorema do n.º 163,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2} \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} - \frac{2z^3}{\pi^4} \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} - \frac{2z^5}{\pi^6} \sum_1^\infty \frac{1}{n^6} - \dots$$

Esta fórmula dá o desenvolvimento de $\cot z$ em serie ordenada segundo as potencias de z, quando é $|z| < \pi$.

II. Por ser

$$z \cot z = \frac{iz(e^{2iz}+1)}{e^{2iz}-1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1}$$

temos (n.º 167-V), representando $z \cot z$ por u,

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} (2i)^n B_{n-1},$$

B_{n-1} designando os numeros de Bernoulli; e portanto, applicando a fórmula de Maclaurin,

$$z \cot z = 1 - \frac{2^2 B_1}{2!} z^2 - \frac{2^4 B_3}{4!} z^4 - \frac{2^6 B_5}{6!} z^6 - \dots$$

Egualando os coefficientes das potencias de grau $2m-1$ de z nos dois desenvolvimentos de $\cot z$ que vimos de obter, resulta a importante relação, descoberta por Euler [1] e publicada nas suas *Institutiones Calculi differentialis*,

$$\frac{2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m-1}}{(2m)!} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2m}}.$$

III. Do desenvolvimento de $\cot z$ que vimos de obter, póde tirar-se o desenvolvimento de $\operatorname{tang} z$, de $\sec z$ e de $\operatorname{cosec} z$ em serie ordenado segundo as potencias de z, desenvolvendo os segundos membros das fórmulas conhecidas:

$$\operatorname{tang} z = \cot z - 2 \cot 2z, \quad \operatorname{cosec} z = \cot z + \operatorname{tang} \frac{1}{2} z, \quad \sec z = \operatorname{tang} z \operatorname{cosec} z;$$

e vê-se que a primeira e a terceira funcção são susceptiveis d'este desenvolvimento, quando é $|z| < \frac{\pi}{2}$, e a segunda, quando é $|z| < \pi$.

Das duas primeiras egualdades resultam os desenvolvimentos

$$\operatorname{tang} z = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m}(2^{2m}-1)\frac{B_{2m-1}}{(2m)!} z^{2m-1},$$

$$z \operatorname{cosec} z = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(2^{2m-1}-1)\frac{B_{2m-1}}{(2m)!} z^{2m}.$$

Pondo na ultima

$$\sec z = E_0 + \frac{1}{2!}E_2 z^2 + \frac{1}{4!}E_4 z^4 + \ldots,$$

substituindo no seu segundo membro $\operatorname{tang} z$ e $\operatorname{cosec} z$ pelos seus desenvolvimentos, ordenando o resultado segundo as potencias de z, e egualando depois os coefficientes das mesmas potencias de z nos dois membros da identidade assim obtida, vem uma serie de equações que determinam as constantes E_0, E_2, E_4, etc. por meio dos numeros de Bernoulli.

Aos numeros E_0, E_2, E_4, etc. dá-se o nome de *numeros de Euler*. Podem ser calculados, independentemente dos numeros de Bernoulli, por meio da egualdade

$$E_{2m} = \left(\frac{d^{2m}(\cos x)^{-1}}{dx^{2m}}\right)_{x=0},$$

que dá, applicando a fórmula (3) do n.º 105,

$$E_{2m} = \Sigma(-1)^i \frac{(2m)!\, i!\cos^\alpha \frac{\pi}{2}\cos^\beta 2\frac{\pi}{2}\ldots\cos^\lambda 2m\frac{\pi}{2}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta(3!)^\gamma\ldots(2m!)^\lambda},$$

onde α, β, γ, ... representam todas as soluções inteiras, positivas e nullas, da equação

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + 5\varepsilon + 6\omega + \ldots + 2m\lambda = 2m,$$

e onde

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

ou finalmente

$$E_{2m} = \Sigma(-1)^{i+\beta+\omega+\ldots}\frac{(2m)!}{\beta!\,\delta!\,\omega!\ldots(2!)^\beta(4!)^\delta(6!)^\omega\ldots},$$

onde δ, ω, ... representam as soluções inteiras, positivas e nullas, da equação

$$\beta + 2\delta + 3\omega + \ldots = m,$$

e onde

$$i = \beta + \delta + \omega + \dots$$

Podem ainda calcular-se os numeros considerados por meio da relação de recorrencia

$$E_{2m} - \binom{2m}{2} E_{2m-2} + \binom{2m}{4} E_{2m-4} - \dots = 0,$$

que se obtem derivando $2m$ vezes os dois membros da equação

$$y \cos z = 1$$

e notando que é $y_0^{(2m)} = E_{2m}$. Para applicar esta relação deve attender-se a que é $E_0 = 1$.

177. Consideremos ainda a funcção $\operatorname{tang} z$.

Partindo da expressão de $\cos z$ dada no n.º 170, acha-se, procedendo como no numero anterior, a fórmula, devida a Euler:

$$\operatorname{tang} z = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{2z}{\frac{(2c+1)^2}{4}\pi^2 - z^2}$$

ou

$$\operatorname{tang} z = \sum_{c=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\frac{2c+1}{2}\pi - z} - \frac{1}{\frac{2c+1}{2}\pi + z} \right],$$

onde estão explicitos os pólos $\frac{2c+1}{2}\pi$ e $-\frac{2c+1}{2}\pi$ da funcção $\operatorname{tang} z$.

Da primeira das fórmulas precedentes resulta a seguinte:

$$\operatorname{tang} z = \frac{8z}{\pi^2} \left[\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2c+1)^2} + \frac{2^2 z^2}{\pi^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2c+1)^4} + \dots \right],$$

da qual se deduz, comparando-a com o desenvolvimento de $\operatorname{tang} z$ precedentemente escripto, a relação

$$\frac{2^{2m} - 1}{2(2m)!} \pi^{2m} B_{2m-1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2c+1)^{2m}}.$$

Dos desenvolvimentos de $\cot z$ e $\operatorname{tang} z$ deduz-se, por meio da relação

$$2 \sec z = \cot \frac{1}{2} z + \operatorname{tang} \frac{1}{2} z.$$

já anteriormente empregada, o desenvolvimento

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} - \sum_{c=1}^{\infty} (-1)^c \frac{2z}{c^2\pi^2 - z^2},$$

e d'este tira-se, mudando z em $\frac{\pi}{2} - z$, o desenvolvimento de $\sec z$:

$$\sec z = \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \frac{2c+1}{\frac{(2c+1)^2}{4}\pi^2 - z^2}.$$

Este ultimo desenvolvimento dá este outro:

$$\sec z = \frac{4}{\pi^2}\left[\sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \cdot \frac{1}{2c+1} + \frac{2^2 z^2}{\pi^2} \Sigma (-1)^c \cdot \frac{1}{(2c+1)^3} + \ldots\right],$$

por meio do qual e de um outro desenvolvimento da mesma funcção, anteriormente escripto, se deduz a relação

$$\frac{\pi^{2m} E_{2m}}{2^{2m+1}(2m)!} = \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c \cdot \frac{1}{(2c+1)^{2m+1}}.$$

178. THEOREMA DE MITTAG-LEFFLER. — *Sendo dadas as quantidades $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_c, \ldots$, collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e satisfazendo á condição* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *e sendo dadas as funcções*

$$G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \ \ldots, \quad G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right), \ \ldots,$$

que são da fórma (2), é sempre possivel formar uma funcção $f(z)$ da fórma

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right],$$

que seja regular em todos os pontos do plano, differentes de $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, e da qual estes pontos sejam pólos ou pontos singulares essenciaes.

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, que são pólos ou pontos singulares essenciaes, póde ser reduzida á fórma

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty} \left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right],$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira de z [1].

[1] Mittag-Leffler: — *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes* (*Acta Mathematica*, tom. IV).

Por ser uniformemente convergente a serie

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-1} + \frac{A_2}{a_c^2}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-2} + \dots,$$

quando z é differente de a_c, e por ser cada termo d'esta serie susceptivel de ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de z, quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, teremos, em virtude do theorema do n.º 163,

(A) $$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

Consideremos agora, como no n.º 171, uma serie de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_c, \dots$, taes que a somma $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ seja convergente, e dêmos a m_c um valor tão grande que seja

(B) $$\left|\sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k\right| < \varepsilon_c,$$

qualquer que seja o valor que se attribua a z, que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, o que é sempre possivel, por ser uniformemente convergente a serie (A) na região do plano determinada pela condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$. A somma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z), \quad F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

satisfaz ás condições do theorema enunciado, isto é, representa a funcção $f(z)$, como vamos ver.

Seja z_0 um ponto do plano, differente dos pontos a_1, a_2, etc., e ρ uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Por ser $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$ e por ser convergente a serie $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$, é sempre possivel dar a c_1 um valor tão grande que as desegualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon, \quad \sum_{c}^{c+p} \varepsilon_c < \delta$$

sejam satisfeitas ao mesmo tempo por todos os valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \overline{\gtrless} \rho$, qualquer que seja p.

*

D'estas desegualdades e da desegualdade (B) conclue-se que a desegualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_t+1}^{\infty} A_k^{(t)} \left(\frac{z}{a_t} \right)^{k} \right| < \delta$$

ou (form. A)

$$\sum_{t=c}^{c+p} | F_t(z) | < \delta$$

é tambem satisfeita pelos valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Logo a serie $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é uniformemente convergente na região definida pela condição $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$.

Posto isto, como z_0 é differente de a_c, supponhamos que se dá a ρ um valor tão pequeno que seja $|z - z_0| < |z - a_c|$. O segundo membro da egualdade

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} \frac{A_t}{z_0 - a_c} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-1}$$

é susceptivel (n.º 163) de ser desenvolvido em serie ordenada segundo as potencias de $z - z_0$ na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \overline{\overline{<}} \rho$; logo o mesmo acontece á funcção $F_c(z)$, e temos (n.º 163)

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

A funcção $\sum_{1}^{\infty} F_c(z)$ é pois regular no ponto z_0.

Consideremos agora um ponto singular a_j da mesma funcção. Dando n'este caso a ρ um valor tão pequeno que na região determinada pela condição $|z - a_j| \overline{\overline{<}} \rho$ não exista outro ponto singular da funcção considerada, teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j),$$

visto que o primeiro membro não tem o ponto singular a_j; e portanto

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) + P_3(z - a_j).$$

Logo a_j é um pólo ou um ponto singular essencial da funcção $\Sigma F_c(z)$.

Os pontos singulares a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar, são differentes de zero. Para que 0 seja um ponto singular da funcção, de modo que na visinhança d'este

ponto tenhamos

$$f(z) = P_2(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right), \quad G_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{1} \left(\frac{1}{z}\right),$$

basta pôr

$$f(z) = \sum_{c=1}^{m} F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

Com effeito, a funcção

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)}\right)$$

é (n.º 163) regular na visinhança de qualquer ponto z_0 differente de 0; e na visinhança do ponto 0 a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é regular.

De tudo o que precede conclue-se que a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ tem todas as propriedades enunciadas na primeira parte do theorema de Mittag-Leffier, e representa portanto a funcção $f(z)$ que queriamos formar.

Para demonstrar a segunda parte, basta notar que a differença entre $f(z)$ e $\sum_{1}^{\infty} F_c(z)$ não tem pontos singulares, e portanto é egual a uma funcção inteira $\varphi(z)$.

179. *Quociente de duas funcções inteiras.* — Vimos já (n.º 168-7.º) que o quociente de duas funcções inteiras é regular em todo o plano, excepto nos pontos que são raizes do denominador, os quaes são pólos (n.º 175). A estas funcções é pois applicavel o theorema de Mittag-Leffler.

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, que são pólos, é o quociente de duas funcções inteiras. Com effeito, chamando n_1, n_2, etc. os expoentes dos factores $(z - a_1)^{n_1}$, $(z - a_2)^{n_2}$, etc. pelos quaes é necessario multiplicar $f_1(z)$ para fazer desapparecer os pólos, e construindo por meio do theorema de Weierstrass uma funcção inteira $\varphi_2(z)$, cujas raizes sejam a_1, a_2, etc. com os graus de multiplicidade n_1, n_2, etc., o producto de $f_1(z)$ por $\varphi_2(z)$ é regular em todo o plano, e representa portanto uma funcção inteira $\varphi_1(z)$.

Para um estudo mais desenvolvido da theoria das funcções analyticas, da qual nos occuparemos outra vez no Calculo integral, para expôr os methodos de Cauchy, consultem-se as obras seguintes:

Forsyth: — *Theory of Functions of a complex variable*, Cambridge, 1893; Vivanti: *Teoria delle funzioni analitiche*, Milano, 1901.

INDICE

Introducção

CAPITULO I

Theoria dos numeros irracionaes, dos numeros negativos e dos numeros imaginarios. **Regras para o seu calculo**

CAPITULO II

Principios geraes da theoria das funcções. Funcções algebricas, logarithmicas, etc.

Calculo differencial

CAPITULO I

Noções preleminares

CAPITULO II

Derivadas de primeira ordem das funcções

CAPITULO III

Applicações geometricas dos principios precedentes

CAPITULO IV

Derivadas e differenciaes de ordem qualquer

CAPITULO V

Applicações analyticas da fórmula de Taylor

CAPITULO VI

Applicações geometricas da fórmula de Taylor

CAPITULO VII

Funcções definidas por series. Singularidades das funcções

CAPITULO VIII

Funcções de variaveis imaginarias

Erratas

Pag.	lin.	erro	emenda
77	24	$b'_{,}$	$b'_n, \dots$
81	25	(z)	$f(z)$
87	22	*rationelles*	*rationnelles*
94	15	x	y
98	4	k	l
99	1	a negativa	a é negativa
139	20	$\frac{u}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial y}$
258	19	$\frac{d^2u}{dx^3}$	$\frac{d^3u}{dx^3}$
259	19	O_{k+2}	θ_{k+2}
268	16	primeira	segunda
319	11	$\lvert ab \rvert$	ab
336	No fim do n.º 162 accrescentar as palavras seguintes:		

Da desegualdade (a) tira-se o theorema enunciado, fazendo tender δ para zero.